Letzte Woche:

1. Postulat

Zustandsraum $\hat{=}$ komplexer VR $\mathcal{H}$ mit hermiteschem Skal. prod.

Zustand $\hat{=}$ normierter Vektor

2. Postulat (Messpostulat, elem. Version)

a) Zu jedem Zustand φ gibt es eine Messung M_φ mit zwei möglichen Ausgängen:

1 $\hat{=}$ "positiv" $\hat{=}$ "Zustand φ liegt vor"

0 $\hat{=}$ "negativ" $\hat{=}$ "Zustand φ liegt nicht vor"

b) Messung M_φ am System im Zustand ψ positiv mit

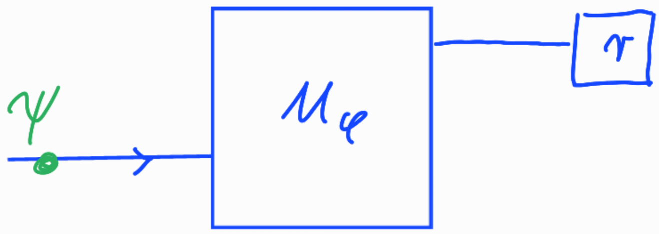
Wahrscheinlichkeit

$$p = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2$$

(Bornsche Regel)

2) Es gibt <u>ideale</u> Messung $\tilde{M}_\varphi$ derart, dass nach <u>positivem</u> Ausgang System im Zustand φ

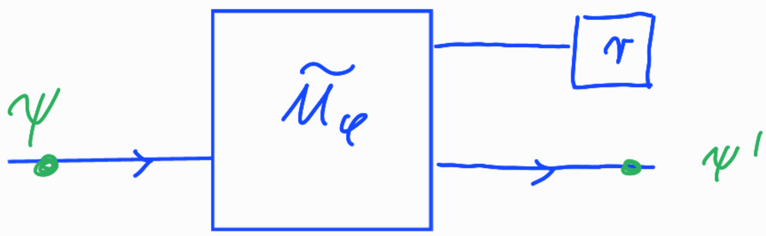
<u>schematisch:</u>



$r = 0, 1$

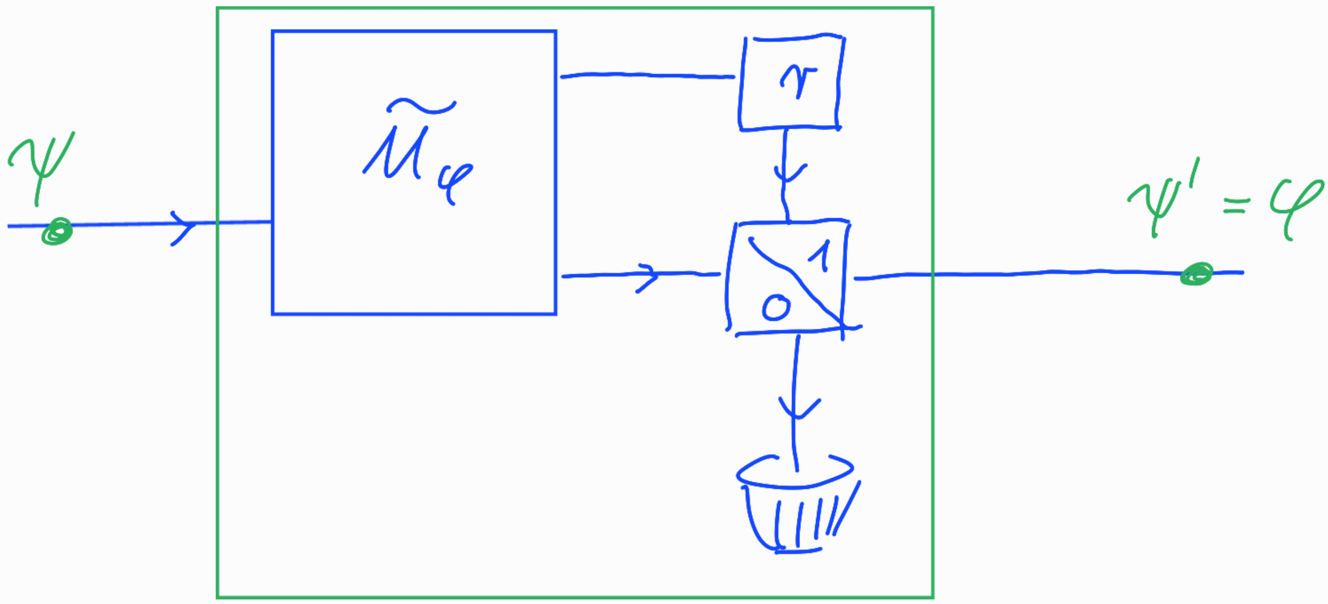
$p = |\langle \varphi, \psi \rangle|^2$

<u>ideale</u> Messung:

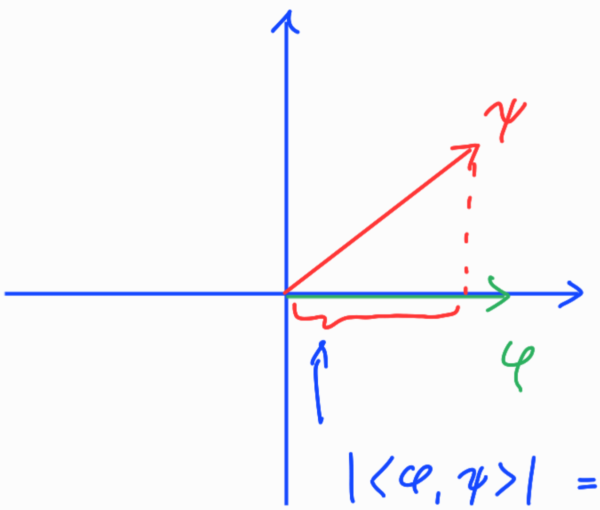


$\psi' = \varphi$ wenn $r = 1$

→ Zustandspräparation :



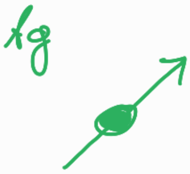
Messung "geometrisch" in $\mathcal{H}$:



$|\langle \varphi, \psi \rangle| = \sqrt{p}$

Stern-Gerlach-Experiment (1922 Frankfurt)

→ Messung des magnetischen Moments von Silberatomen:

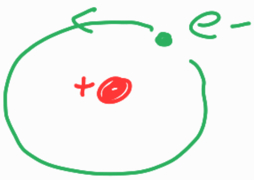


$$\vec{\mu} = \mu_0 \, \hat{u} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$$

μ_0: konstanter Betrag

$\hat{u}$: variable Richtung

$$[Ag] = \underbrace{[Kr]\, 4d^{10}}_{\text{Rumpfion}} \; 5s^1$$



(Bohrsches Atommodell

$l = 1 \longrightarrow$ mag. Moment

tatsächlich:

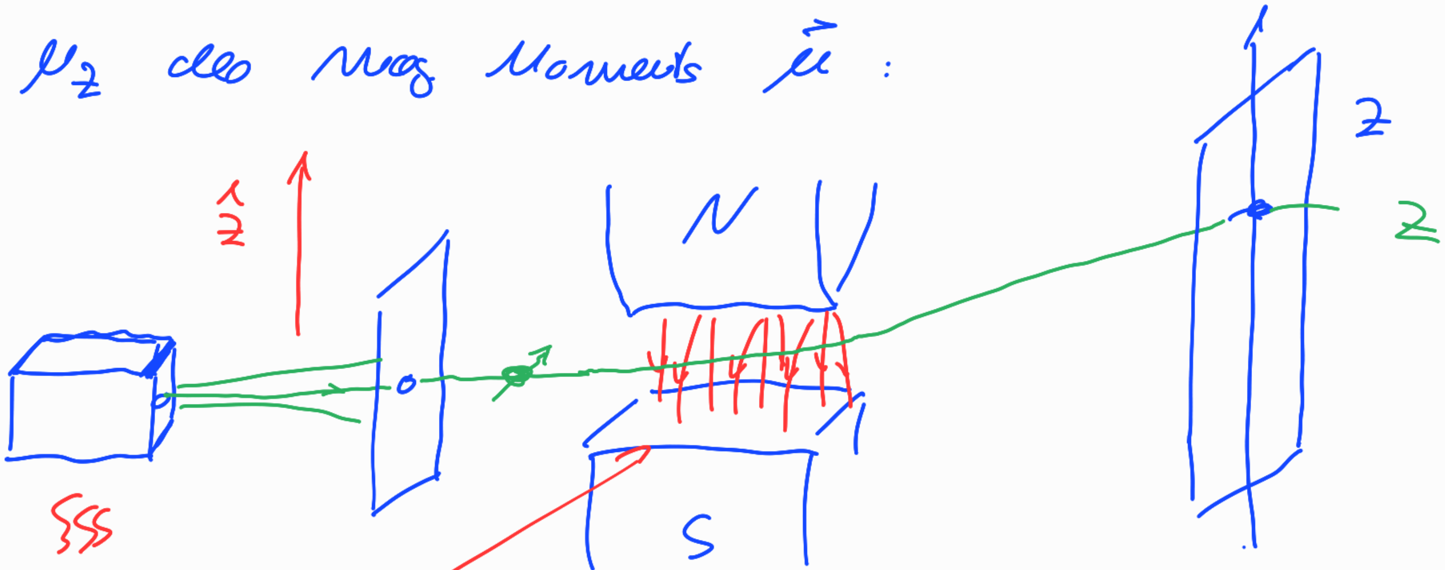
$l = 0$

Elektronspin $s = 1/2$

→ mag. Moment

$$\vec{\mu} = \mu_0 \, \hat{u} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$$

Messapparatur zur Bestimmung der z-Komponente μ_z des mag. Moments $\vec{\mu}$:



inhomogenes B-Feld: $\vec{B} = B(z) \cdot \hat{z}$

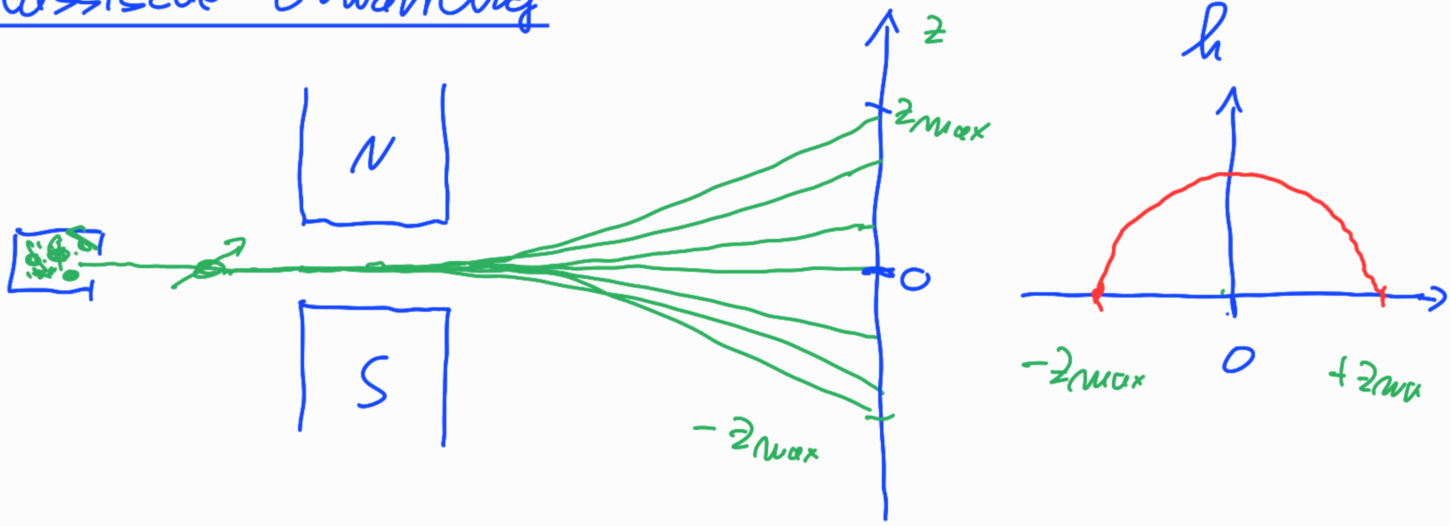
Ag-Atom mit mag. Moment $\vec{\mu}$ erfährt

Kraft $\vec{F} = \mu_z \dfrac{\partial B}{\partial z} \hat{z}$.

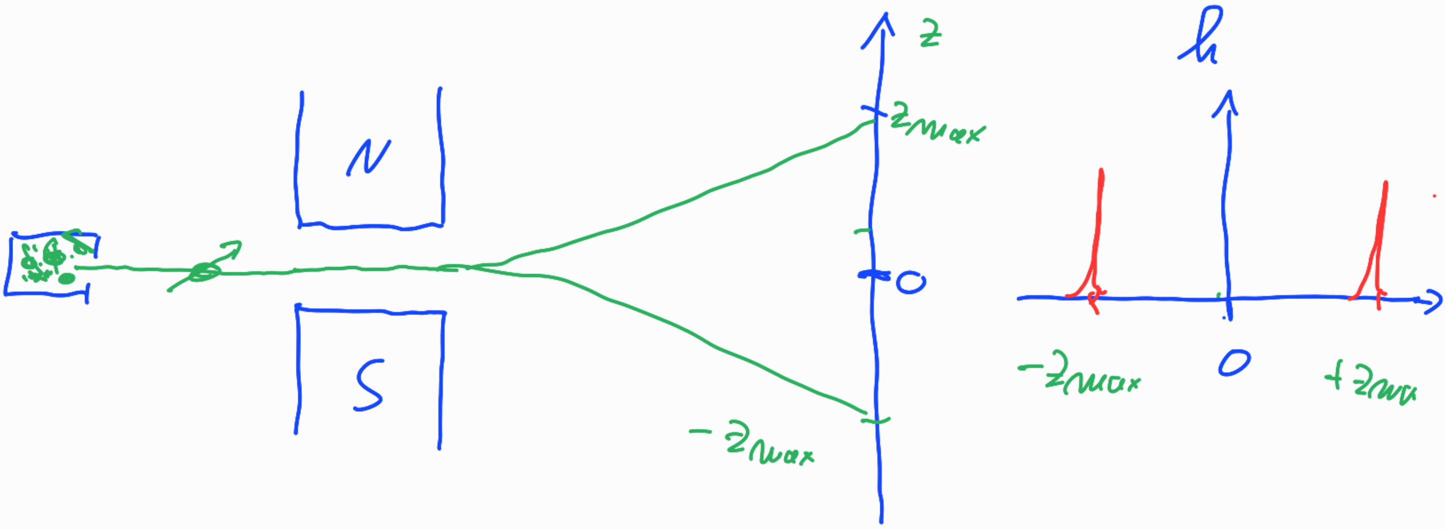
$\Rightarrow$

$$\boxed{z \propto \mu_z}$$

<u>Klassische Erwartung</u>



<u>Experiment</u>:



„Richtungsquantisierung" des mag. Moments und damit auch des Elektronendrehimpulses (= Spin)

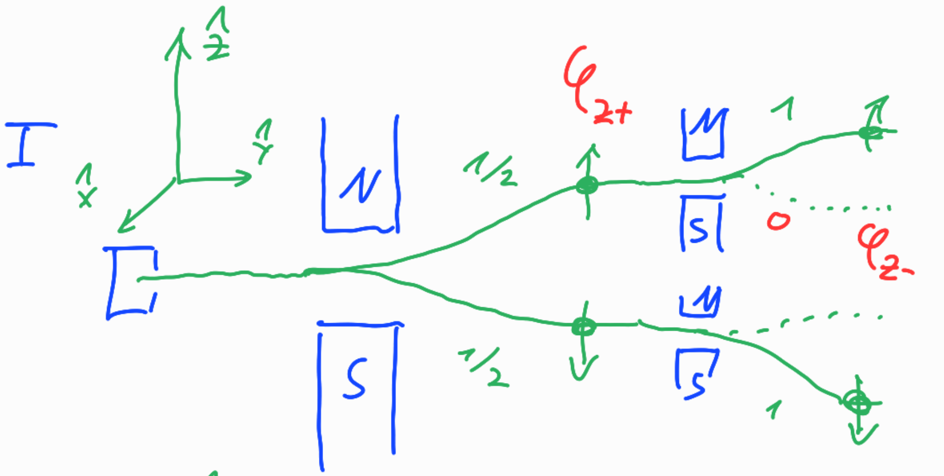
„Drehimpulsquantisierung": Sommerfeld, Debye, ...

Stern vor dem Exp: "Unsinn!"

Varianten des Stern-Gerlach-Experiments

(nicht historisch, heute in äquivalenten Systemen durchführbar)

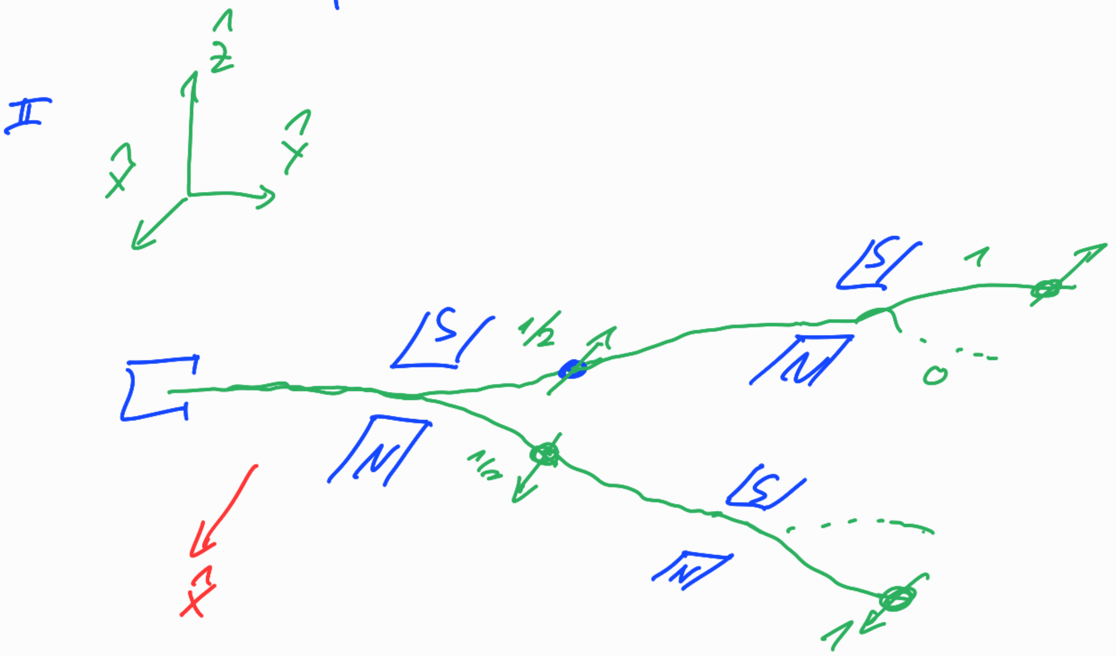
I



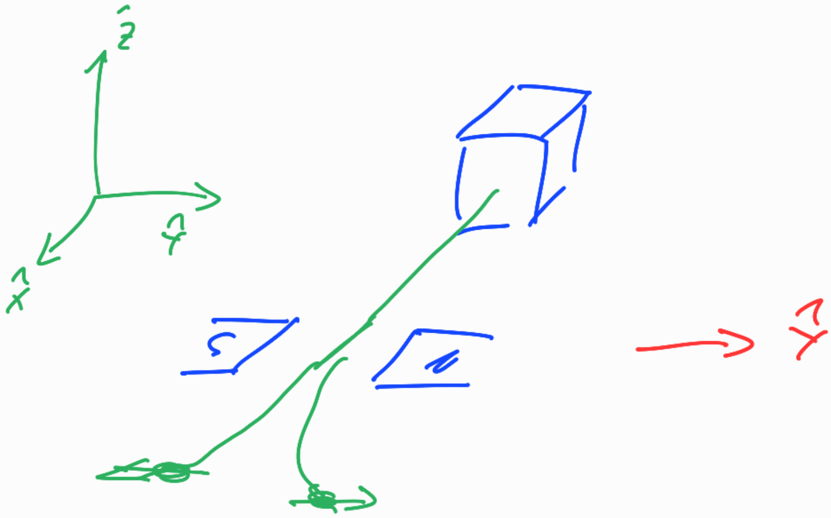
B.R.

$$0 \overset{!}{=} p = |\langle \varphi_{z-}, \varphi_{z+} \rangle|^2$$

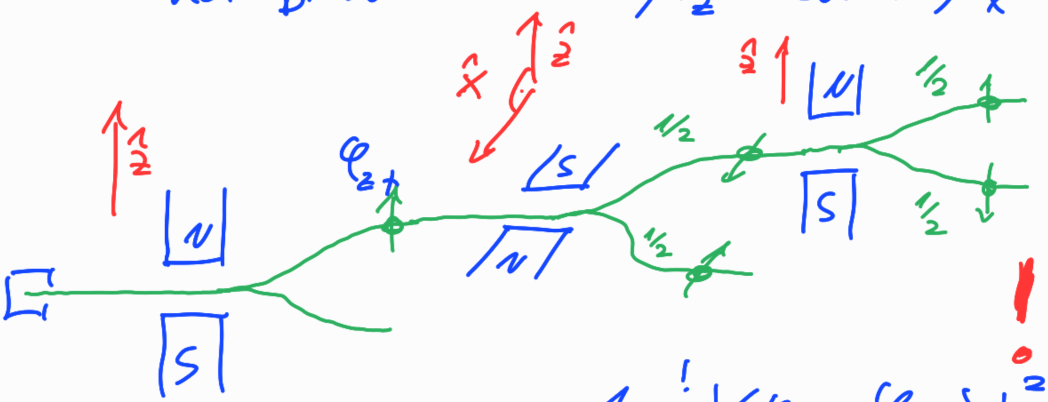
II



III



IV: Kombination von μ_z- und μ_x-Messung:



$$\frac{1}{2} \overset{!}{=} |\langle \varphi_{x+}, \varphi_{z+} \rangle|^2 = p$$

quantenmechanische Beschreibung:

- Zustandsraum = zweidimensionaler VR je
  2 für mag. Moment des Ag-Atoms

I Zustände φ_{z+} und φ_{z-} für mag. Momente in positiver bzw. negativer Ausrichtung ("Polarisierung") bzgl. $\hat{z}$-Achse

$\varphi_{z+} \;\hat{=}$  ,  $\hat{=}\; \varphi_{z-}$

„up"　　　　„down"

$$\varphi_{z+} \overset{?}{\longleftrightarrow} \varphi_{z-} \longrightarrow \varphi_{z-} \perp \varphi_{z+}$$

I: $$0 \overset{!}{=} |\langle \varphi_{z-}, \varphi_{z+} \rangle|^2 =$$

II: analog: orthogonale Zustände $\varphi_{x+}, \varphi_{x-}$

III: 　"　　　"　　　"　　" 　$\varphi_{y+}, \varphi_{y-}$

IV: relative Orientierung $\varphi_{z\pm} \leftrightarrow \varphi_{x\pm} \leftrightarrow \varphi_{y\pm}$:

$$\frac{1}{2} \overset{\text{Exp.}}{=} \underset{\text{B.R.}}{p} = |\langle \varphi_{z+}, \varphi_{x+} \rangle|^2$$

analog: $|\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{x\pm} \rangle|^2 = 1/2$; 　$|\langle \varphi_{x\pm}, \varphi_{y\pm} \rangle|^2 = 1/2$

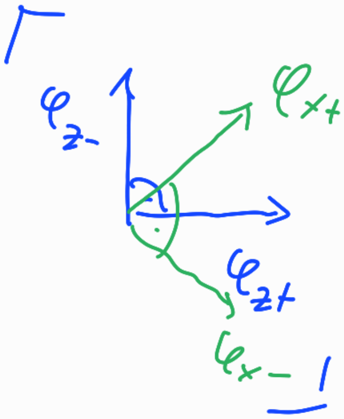
(*) $|\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{y\pm} \rangle|^2 = 1/2$

Aufgabe: finde orthonormale Paare

$$\varphi_{z\pm}, \quad \varphi_{x\pm}, \quad \varphi_{y\pm}$$

derart, dass wechselseitigen Skalarprodukte den Bedingungen (*) genügen.

Lösung: $\varphi_{z+}, \varphi_{z-}$ orthonormal



$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi_{x+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + \varphi_{z-}\right) \\ \varphi_{x-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} - \varphi_{z-}\right) \\ \varphi_{y+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + i\,\varphi_{z-}\right) \\ \varphi_{y-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} - i\,\varphi_{z-}\right) \end{aligned}}$$

!

$$\langle \varphi_{z+}, \varphi_{y+} \rangle = \langle \varphi_{z+}, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + i\varphi_{z-}\right)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \checkmark$$

$$|\langle \varphi_{x+}, \varphi_{y+} \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \varphi_{z+} + \varphi_{z-}, \varphi_{z+} + i \varphi_{z-} \rangle|$$

$$= \frac{1}{2} |(1 + i)| = \frac{1}{2} \sqrt{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ✓$$