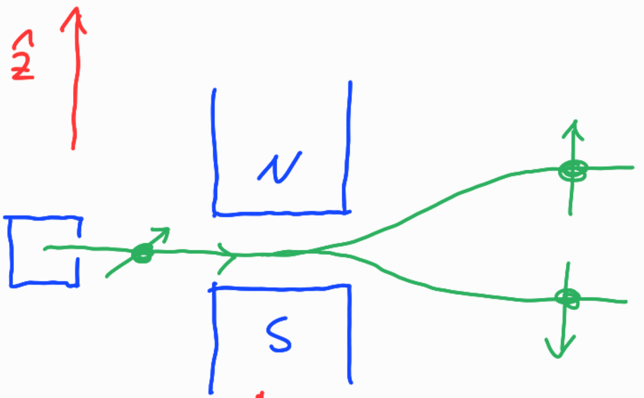
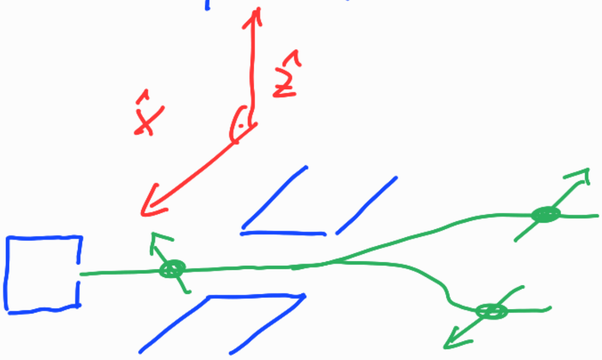
## gestern: Stern-Gerlach-Experiment

$$\varphi_{z+} \perp \varphi_{z-}$$




$$\hat{=}\ \varphi_{z+} \longrightarrow \mu_z = +\mu_0$$

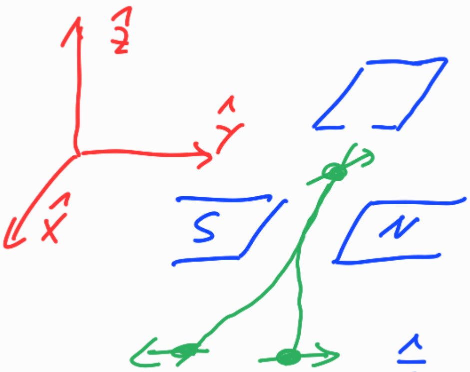
$$\hat{=}\ \varphi_{z-} \longrightarrow \mu_z = -\mu_0$$




$$\hat{=}\ \varphi_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} - \varphi_{z-}\right)$$

$$\hat{=}\ \varphi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + \varphi_{z-}\right)$$

$$\varphi_{x+} \perp \varphi_{x-}$$




$$\hat{=}\ \varphi_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + i\,\varphi_{z-}\right)$$

$$\hat{=}\ \varphi_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} - i\,\varphi_{z-}\right)$$

$$\varphi_{y+} \perp \varphi_{y-}$$

$$\left|\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{x\pm}\rangle\right|^2 \overset{!}{=} 1/2 \,, \quad \left|\langle \varphi_{z\pm}, \varphi_{y\pm}\rangle\right|^2 \overset{!}{=} 1/2$$

$$\left|\langle \varphi_{x\pm}, \varphi_{y\pm}\rangle\right|^2 \overset{!}{=} 1/2$$

$$\vec{\mu} = \mu_0 \, \hat{u} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{pmatrix}$$

## Dirac-Notation

1) $\boxed{\mathcal{H} \ni \psi \quad \longleftrightarrow \quad |\psi\rangle \quad \text{"ket } \psi\text{"}}$

2) $\varphi_{z+} \longrightarrow |\varphi_{z+}\rangle$ oder: $|z+\rangle$

oder: $|+\rangle$

$\varphi_{z-} \longrightarrow |\varphi_{z-}\rangle$ " : $|z-\rangle$

$|-\rangle$

$$\varphi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{z+} + \varphi_{z-}\right) \longrightarrow |x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle + |z-\rangle\right)$$

$\vdots$

2) Zu jedem ket $|\psi\rangle$ existiert genau ein Objekt $\langle\psi|$, genannt "Bra $\psi$", derart dass:

$$\langle\psi|\varphi\rangle \overset{!}{=} \langle\psi, \varphi\rangle$$

Bra - c - ket

Bracket

[ Mathematik: $\langle\psi|$ ist der Dualvektor zu $|\psi\rangle$ ]

Rechenregeln:

1) $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle \longrightarrow \langle\psi| = \langle\varphi_1| + \langle\varphi_2|$

2) $|\psi\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{C}}}{\alpha}|\varphi\rangle \longrightarrow \langle\psi| = \alpha^*\langle\varphi|$

d.h.: $|\psi\rangle = \alpha_1|\varphi_1\rangle + \alpha_2|\varphi_2\rangle$

$\longrightarrow \langle\psi| = \alpha_1^*\langle\varphi_1| + \alpha_2^*\langle\varphi_2|$

Wozu? einfache und intuitive Darstellung

(1) von Operatoren = lineare Abbildungen $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Wozu? zur Beschreibung von physikalischen Größen

(2) = observierbare Variablen

= Observablen

① <u>Beispiele:</u>

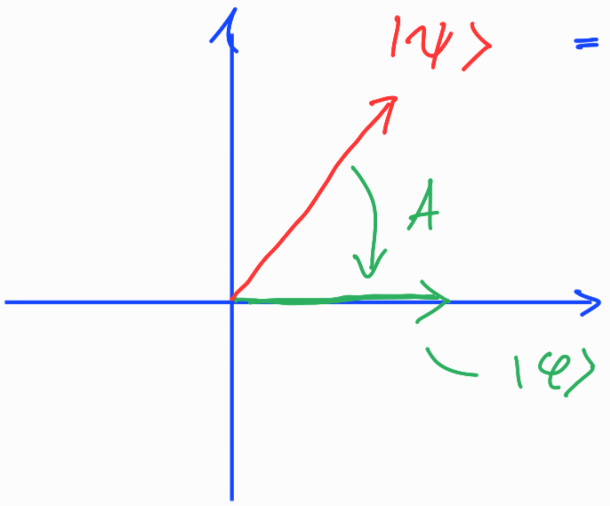
$$\left.\begin{array}{ll} |\varphi\rangle & \text{Ket} \\ \langle\varphi| & \text{Bra} \end{array}\right\} \to \langle\varphi|\varphi\rangle = 1$$

$\to$ Operator $A := |\varphi\rangle\langle\varphi|$

- Wirkung auf bel. $|\psi\rangle$:

- $$A|\psi\rangle = (|\varphi\rangle\langle\varphi|)|\psi\rangle$$
$$= |\varphi\rangle \underbrace{\langle\varphi|\psi\rangle}_{= \langle\varphi,\psi\rangle \in \mathbb{C}} = \langle\varphi,\psi\rangle|\varphi\rangle$$

- $$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|(|\varphi\rangle\langle\varphi|)|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle$$
$$= \underbrace{\langle\psi,\varphi\rangle}_{=\langle\varphi,\psi\rangle^*}\langle\varphi,\psi\rangle = |\langle\varphi,\psi\rangle|^2$$




$|\varphi\rangle\langle\varphi|$ = Projektion auf $|\varphi\rangle$

2) orthonormale Zust. $|\varphi_1\rangle, \; |\varphi_2\rangle$

$$\to \qquad B := b_1 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + b_2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$$

$$B|\psi\rangle = b_1 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi\rangle + b_2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\psi\rangle$$

$$\vdots$$

$$BB = B^2 = \left(b_1 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + b_2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\right)\cdot\left(b_1 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + b_2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\right)$$

$$= b_1^2 |\varphi_1\rangle\overbrace{\langle\varphi_1|\,|\varphi_1\rangle}^{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}\langle\varphi_1| + b_1 b_2 |\varphi_1\rangle\underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle}_{0}\langle\varphi_2|$$

$$+ b_2 b_1 |\varphi_2\rangle\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle}_{0}\langle\varphi_1| + b_2^2 |\varphi_2\rangle\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}_{1}\langle\varphi_2|$$

$$= b_1^2 |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + b_2^2 |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| = B^2$$

3) orthonormale Zust. $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ :

$$G := |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|$$

- $$G|\varphi_2\rangle = |\varphi_1\rangle\underbrace{\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}_{1} + |\varphi_2\rangle\underbrace{\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle}_{0}$$
$$= |\varphi_1\rangle$$

$$G|\varphi_1\rangle = |\varphi_2\rangle$$

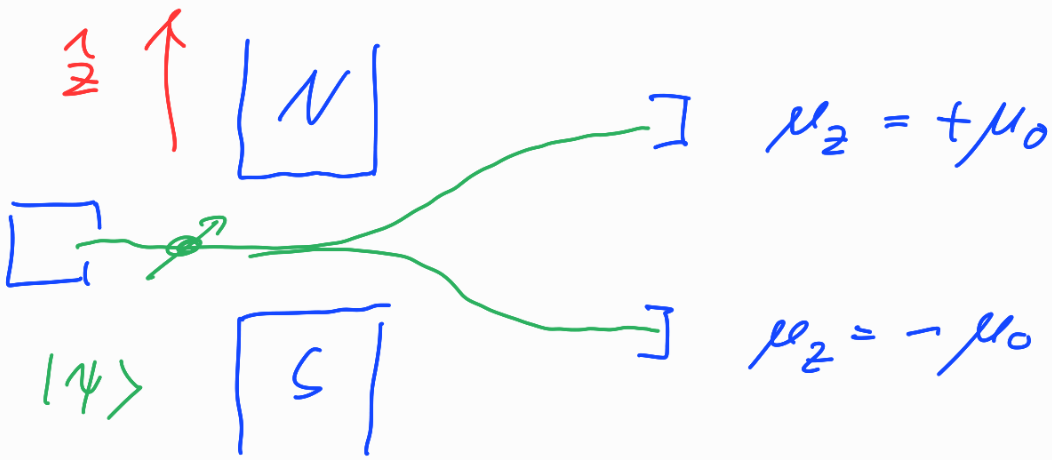
⌈ Spin-Flip : $|z+\rangle\langle z-| + |z-\rangle\langle z+|$ ⌋

## ② Wozu Operatoren ?

Beschreibung von Observablen !

Beispiel : z-Komponente des mag. Moments von Silberatomen : $\mu_z$

Messgerät:




- $|\psi\rangle = |z+\rangle$ : mit Wkt $p = |\langle z+|\psi\rangle|^2$
$= |\langle z+|z+\rangle|^2 = 1$
wird Messwert $+\mu_0$ erhalten

- $|\psi\rangle = |z-\rangle$ : mit $p = |\langle z-|\psi\rangle|^2 = |\langle z-|z-\rangle|^2$
$= 1$ wird Messwert $-\mu_0$ gemessen

- allg. Zustand $|\psi\rangle$:
mit Wkt $p_+ = |\langle z+|\psi\rangle|^2$ wird
$\mu_z = +\mu_0$ gemessen

mit Wkt $P_- = |\langle z- | \psi \rangle|^2$

wird $\mu_z = -\mu_0$ gemessen.

$\rightarrow$ Erwartungswert der Größe $\mu_z$

im Zustand $|\psi\rangle$:

$$\mathbb{E}_{|\psi\rangle}(\mu_z) \equiv \langle \mu_z \rangle_{|\psi\rangle}$$

$$= P_+ (+\mu_0) + P_- (-\mu_0)$$

$$= +\mu_0 |\langle z+ | \psi \rangle|^2 + (-\mu_0) |\langle z- | \psi \rangle|^2$$

$$= +\mu_0 \langle \psi | z+ \rangle \langle z+ | \psi \rangle$$

$$-\mu_0 \langle \psi | z- \rangle \langle z- | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | \underbrace{\varphi \rangle \langle \varphi}_{A} | \psi \rangle = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$$

$$= \langle \psi | \underbrace{\left( \mu_0 |z+\rangle\langle z+| - \mu_0 |z-\rangle\langle z-| \right)}_{\text{Operator}} |\psi\rangle$$

$$=: \hat{\mu}_z$$

mit Operator

$$\hat{\mu}_z := \mu_0 \, |z+\rangle\langle z+| + (-\mu_0)\, |z-\rangle\langle z-|$$

gilt also:

$$\boxed{\mathbb{E}_{|\psi\rangle}(\mu_z) \equiv \langle \mu_z \rangle_{|\psi\rangle} \overset{!}{=} \langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle}$$

Observable: $\mu_x$ , $|\psi\rangle$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{E}_{|\psi\rangle}(\mu_x) = \langle \psi | \hat{\mu}_x | \psi \rangle$$

$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \, |x+\rangle\langle x+| + (-\mu_0)\, |x-\rangle\langle x-|$$