Wiederholung:

3. Postulat (Dynamik)

$$\boxed{\dot{\psi}(t) = -\frac{i}{\hbar} H \, \psi(t)}$$

Schrödinger-gleichung

- H: Hamilton-Operator $\hat{=}$ Energie Obs.
- $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1{,}04 \cdot 10^{-34}$ Js

Plancksches Wirkungsquantum

$$\rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \langle A \rangle_{\psi(t)} = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, A] \right\rangle_{\psi(t)}$$

- $\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$
- $[H, A] = HA - AH$

$\rightsquigarrow$ A Erhaltungsgröße $\Longleftrightarrow$ $[H, A] = 0$

$[H, H] = 0 \rightsquigarrow$ Energie ist Erhaltungsgröße

Zeitentwicklungsoperator

$\psi = \psi(t)$

Schr.-gl.: $\dot{\psi} = \boxed{-\frac{i}{\hbar} H} \psi$

lineare, homogene DGL 1. Ordnung:

Γ 1D: $\dot{y} = a y$ $\qquad y = y(t)$

komplexwertige Fkt.

$\rightarrow$ Lsg. zum AW y_0 bei $t=0$:

$y(t) = e^{at} y_0$

Γ

- $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}(e^{at} y_0) = a \underbrace{e^{at} y_0}_{y(t)} = a y(t)$ ✓
- $y(0) = e^{a \cdot 0} y_0 = y_0$ ✓ $\lrcorner$

allg: $\dot{Y} = A Y$ $\quad$: $Y = Y(t)$ vektorwertige Fkt.

: A: Operator

Lsg. zum AW Y_0 bei $t=0$?

$$Y(t) = e^{At}\, Y_0 = \exp(At)\, Y_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n$$

Operator-Exponentialfkt.

$\Gamma_\circ$ $$\dot{Y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\, n\, t^{n-1}$$

$$= A \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (At)^{n-1}}_{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n} = A\, e^{At} \quad \checkmark$$

$\circ$ $$Y(0) = e^{A\cdot 0}\, Y_0 = Y_0 \qquad \checkmark \quad \lrcorner$$

hier: $$\dot{\psi} = \boxed{-\frac{i}{\hbar} H}\, \psi \quad : \quad Y(t) = \psi(t)$$

$$A = -\frac{i}{\hbar} H$$

$$\rightarrow \quad \psi(t) = \boxed{e^{-\frac{iHt}{\hbar}}}\, \psi_0$$

ist Lsg. der Schr.-gl. zum AZ ψ_0

bei $t = 0$.

mit <u>Zeitentwicklungsoperator</u> $\quad U(t) := e^{-iHt/\hbar}$

also $\quad t_0 = 0 \qquad\qquad t$

$$\psi_0 \xmapsto{U(t)} \psi(t) = U(t)\,\psi_0$$

allg: $\quad t_0 \qquad\qquad t_0 + t$

$$\psi(t_0) \xmapsto{U(t)} \psi(t_0 + t) = U(t)\,\psi(t_0)$$

Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators:

- $U(t)$ unitär:

$$\boxed{U(t)^{\dagger} = U(-t) = U^{-1}(t)}$$

$\ulcorner$

$$(U(t))^\dagger = \left(e^{-iHt/\hbar}\right)^\dagger = e^{(-iHt/\hbar)^\dagger}$$

$$= e^{+iHt/\hbar} = e^{-iH(-t)/\hbar} = U(-t)$$

$H = H^\dagger$

$$= U(t)^{-1}$$

denn $\quad e^{-iHt/\hbar} \cdot e^{+iHt/\hbar} = \mathbb{1}$ $\quad\lrcorner$

$\longrightarrow \quad U(t)$ Norm-erhaltend (per Konstr.)

$$\| U(t)\psi_0 \| \overset{!}{=} \| \psi_0 \|$$

$\ulcorner$ Check:

$$(\text{l.S.})^2 = \langle U(t)\psi_0 , U(t)\psi_0 \rangle$$

$$= \langle \psi_0 , \underbrace{\underbrace{U(t)^\dagger}_{= U(t)^{-1}} U(t)}_{\mathbb{1}} \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \psi_0 \rangle =$$

$$= (\text{r.S.})^2$$

✓ $\lrcorner$

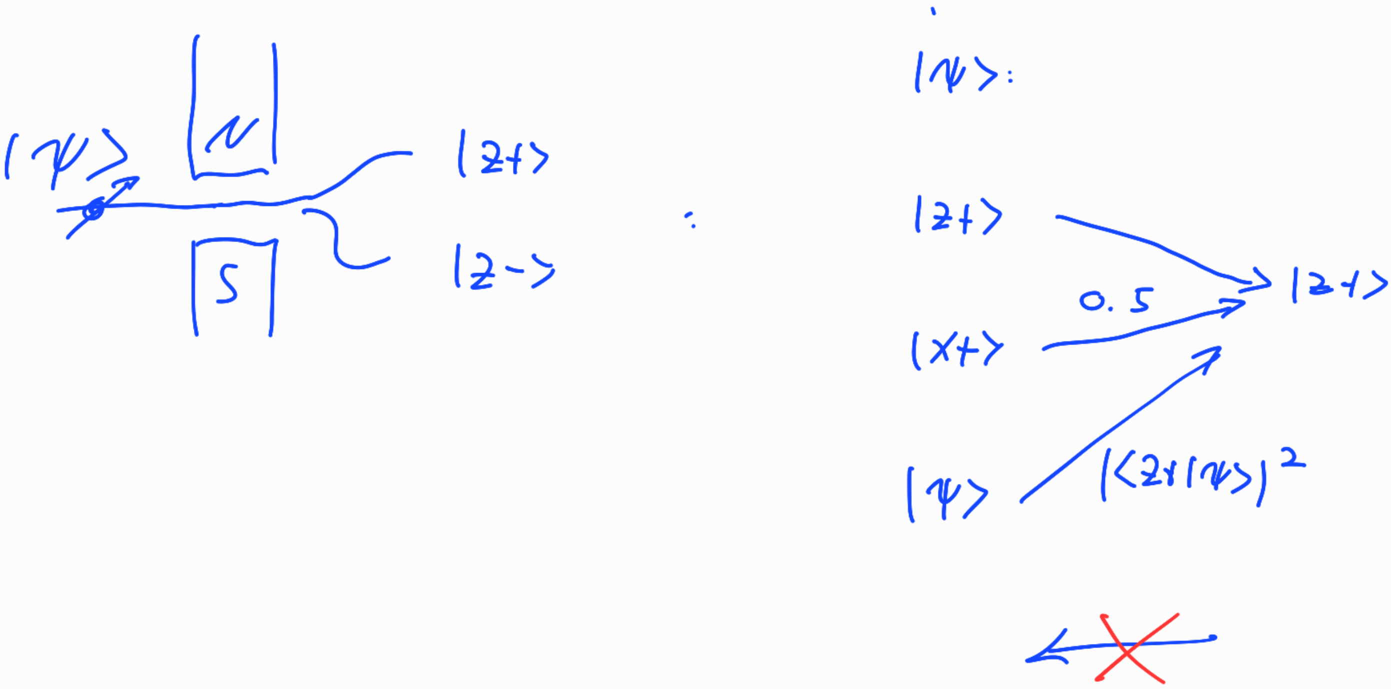
→ Q.M. Dynamik (3. Postulat) ist reversibel!

$$\psi_0 \xrightarrow{U(t)} \psi(t) = U(t)\,\psi_0$$

$$\psi_0 \xleftarrow{U(t)^{-1}} \psi(t)$$

im Gegensatz zum 2. Postulat:

Q.M. Messung ist i.A. irreversibel!



- $$U(t+t') \overset{!}{=} U(t')U(t)$$

$$\left[\begin{array}{l} \psi_0 \xrightarrow{t+t'} U(t+t')\psi_0 \\ \shortparallel \\ \psi_0 \xrightarrow{t} U(t)\psi_0 \xrightarrow{t'} U(t')U(t)\psi_0 \end{array}\right] \quad \text{mit } U(t+t') = U(t')U(t)$$

Darstellung des Zeitentwicklungsoperators in Energiebasis

$$H \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{N} E_n \, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

Eigenenergien: $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \ldots$

(= Eigenwerte des Op.s H)

orthonormale

Energiezustände $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots$

(= Eigenvektoren des Ops H)

genügen der Eigenwertgleichung:

$$\boxed{H\,|\varphi_n\rangle \overset{!}{=} E_n\,|\varphi_n\rangle}$$

(„stationäre Schrödingergleichung")

→ <u>Zeitentw. op. in Energiedarstellung:</u>

$$-\frac{i}{\hbar}Ht = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

exp(...) exp(...)

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar}\,|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$$

Aufg.

$$\boxed{U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_n t}\,|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}$$

mit $\omega_n = E_n/\hbar$

„$U(t)$ multipliziert n-ten Energiezustand $|\varphi_n\rangle$ mit $e^{-i\omega_n t}$"

- $|\psi_0\rangle \equiv |\varphi_k\rangle \xrightarrow{t} |\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\omega_k t}} |\varphi_k\rangle$

keine Änderung von Messwerten / Erwartungswerten!

$$\boxed{\text{Energiezustände sind stationäre Zustände}}$$

- allg.:

$$|\psi_0\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\varphi_k\rangle \xrightarrow{t} |\psi(t)\rangle = \underline{U(t)}|\psi_0\rangle$$

$$= \underline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega_n t} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\right)} \sum_k a_k |\varphi_k\rangle$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} a_k e^{-i\omega_n t} |\varphi_n\rangle \underbrace{\langle\varphi_n|\varphi_k\rangle}_{\delta_{nk}}$$

$$= \sum_k \underline{e^{-i\omega_k t}} a_k \underline{|\varphi_k\rangle} \neq |\psi_0\rangle$$

<u>Bsp</u>:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_0\rangle + |\varphi_1\rangle\right)$$

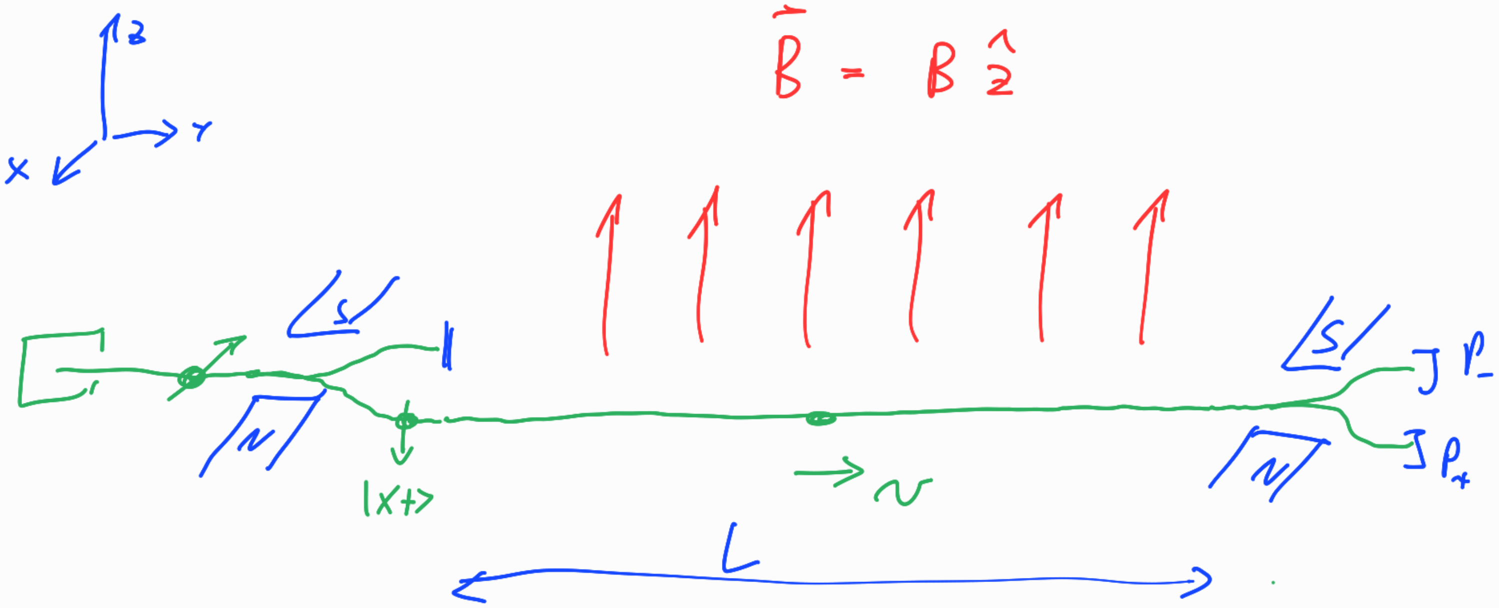
$$\xrightarrow{t} \quad |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_0 t}|\varphi_0\rangle + e^{-i\omega_1 t}|\varphi_1\rangle\right)$$

<u>Beispiel</u>: Dynamik eines <u>Spins</u> im homog. B-Feld

$\Rightarrow$ mag. Moment

im zweiseitigen S.-G.-Exp:

$$\vec{B} = B\,\hat{z}$$



Flugzeit $t = L/v$

$\rightarrow \quad P_+(t)\,, \quad P_-(t) \quad ??$

Hamiltonoperator $H = ?$

Energie eines mag. Moments $\vec{\mu}$ im homog. Magnetfeld $\vec{B}$

$$E = -\vec{B} \cdot \vec{\mu}$$

$\vec{B} = B\hat{z}$:

$$E = -B\mu_z$$

$$\hat{\mu}_z = \mu_0 \left(|z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-| \right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$H = -B\hat{\mu}_z = \mu_0 B \left(|z-\rangle\langle z-| - |z+\rangle\langle z+| \right)$$