

Elemente der Hamiltonschen Mechanik



Vorteile gegenüber Lagrangescher Mech.:

- erlaubt allgemeinere Koordinaten / Impulse
(mittels kanonischer Transformationen)

- geometrischer und damit anschaulicher!

($\hookrightarrow$ symplektische Geometrie, Gegenstand
eines DFG-Forschungsprojekts Uni Köln
u. Uni Bochum: "Symplektische Strukturen
in Geometrie, Algebra u. Dynamik")

$\rightarrow$ besseres u. einfacheres Verständnis der
Mechanik: etwa Sätze von Liouville,
Noether, Poincaréscher Wiederkehrsatz
(s.u.)

Lagrangesche Mechanik: Bahn $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$

genügt Lagrange-Glen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad ; \quad h=1, \dots, f$$

$\hat{=}$ f D Glen 2. Ordnung

Γ

etwa Teilchen im 1D, Kraft $F(q) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q}$: ($f=1$)

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \rightarrow \text{L.G.} \quad m \ddot{q}(t) = F(q(t)) \quad]$$

Hamiltons Idee :

Zustand $X(t) = (q(t), p(t))$

$\nearrow$
William Rowan Hamilton

genügt $2f$ D Glen 1. Ordnung!

1805 - 1865, Dublin

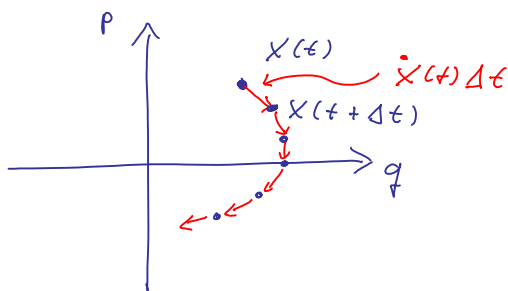
Γ für obiges Teilchen etwa: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$

d.h. $\dot{q} = p/m$

$$\dot{p} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = F(q)$$

2 DGLen 1. Ordnung

für $\dot{x} = (\dot{q}, \dot{p})$ ✓



allgemein:

Hamiltonsche Beschreibung

eines Systems mit

- f unabhängigen Koord. $q = (q_1, \dots, q_f)$
- Lagrange-Fkt. $L(q, \dot{q})$

mittels

(i) Transformation von

Koordinaten, Geschwindigkeiten $\rightarrow$ Koordinaten, Impulse

$$q_h, \dot{q}_h$$



$$q_h, p_h := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(q, \dot{q})$$

$$q_h, \dot{q}_h(q, p)$$



$$q_h, p_h$$

Umkehrung

(ii) Hamilton-Funktion

$$H(q, \underline{p}) = \sum_{h=1}^f \dot{q}_h(q, \underline{p}) p_h - L(q, \dot{q}(q, \underline{p}))$$

führt auf

(iii) „Zustandentwicklungsgleichungen“

$\equiv$ Hamiltonsche Gleichungen

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad \dot{p}_h = - \frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad h=1, \dots, f$$



2 f DGLen 1. Ordnung zur Bestimmung
von $X(t) = (q(t), p(t))$ zum Anfangs-
wert $X_0 = (q_0, p_0)$ bei t_0

beachte: Hamilton-Funktion ist Funktion der Koordinaten
 q_h und Impulse p_h , nicht der Geschwin-
digkeiten $\dot{q}_h$!

bevor wir allgemein zeigen, dass die Hamiltonschen
Gleichungen die Lagrangesche Mechanik reproduzieren
illustrieren wir dies an einem einfachen

Beispiel:

Teilchen mit Koordinaten $q \equiv \vec{r} \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{Kraft } F_h(q) = - \frac{\partial U(q)}{\partial q_h}$$

$$\text{Newton: } q(t) \text{ genügt } m \ddot{q}_h(t) = F_h(q) \quad \checkmark$$

$$\text{Lagrange: } L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q)$$

$$q(t) \text{ genügt L.G.en 2. Art: } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (m \dot{q}_h) = - \frac{\partial U}{\partial q_h} \Leftrightarrow \text{Newton} \quad \checkmark$$

Hamilton: $L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) = \frac{m}{2} \sum_k \dot{q}_k^2 - U(q)$

(i) $q_k, \dot{q}_k \mapsto q_k, p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k$

$$\left. \begin{array}{l} q_k \\ \dot{q}_k(q, p) = \frac{p_k}{m} \end{array} \right\} \longleftarrow q_k, p_k$$

(ii) $H(q, p) = \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k(q, p) p_k - L(q, \dot{q}(q, p))$

(ii) $= \sum_k \frac{p_k^2}{m} - \frac{m}{2} \sum_k \left(\frac{p_k}{m} \right)^2 + U(q)$

$= \frac{1}{2m} \sum_k p_k^2 + U(q)$

d.h.

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

$p = (p_1, p_2, p_3)$

$p^2 = \sum_k p_k^2$

$(= \frac{m}{2} \dot{q}(q, p)^2 + U(q))$



Die Hamilton-Fkt eines autonomen, konservativen N -Teilchen-Systems ist die Gesamtenergie als Funktion der Koordinaten und Impulse

(iii) Hamiltonsche Gleichungen:

a) $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{1}{2m} \sum_k p_k^2 + U(q) \right)$
 $= p_k / m \quad \checkmark$

b) $\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} = - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2m} \sum_k p_k^2 + U(q) \right)$
 $= - \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} = F_k(q)$

mit $p_h = m \dot{q}_h$ nach a) lautet b) also

$$m \ddot{q}_h = F_h(q) \iff \text{Newton} \quad \checkmark$$

Diese Übereinstimmung gilt allgemein! Dazu zeigen wir:

$q(t)$ ist Lsg. der Lagrange-Glen 2. Art

$$\stackrel{!}{\implies} x(t) := (q(t), p(q(t), \dot{q}(t))) \text{ ist Lsg. der } \underline{\text{Hamiltonschen Gleichungen}}$$

(wegen Eindeutigkeit der Lösungen gilt dann Äquivalenz)

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial H}{\partial p_h} &= \frac{\partial}{\partial p_h} \left(\sum_e \dot{q}_e p_e - L \right) = \dot{q}_h + \sum_e \cancel{\frac{\partial \dot{q}_e}{\partial p_h} p_e} \\ &\quad - \sum_e \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e}}_{= p_e} \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial p_h} = \dot{q}_h \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\partial H}{\partial q_h} &= \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\sum_e \dot{q}_e p_e - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_e \cancel{\frac{\partial \dot{q}_e}{\partial q_h} p_e} \\ &\quad - \sum_e \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e}}_{= p_e} \frac{\partial \dot{q}_e}{\partial q_h} = -\frac{\partial L}{\partial q_h} \stackrel{!}{=} -\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}}_{= p_h} \\ &\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad q(t) \text{ Lsg. der L.G.en} \end{aligned}$$

$$\text{also: } -\frac{\partial H}{\partial q_h} = \dot{p}_h \quad \checkmark$$

┌ Bemerkung: Trafo $L(\dot{q}) \rightarrow H(p) = \dot{q}p - L(q, \dot{q})$
mit $p \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ist als Legendre-Transformation

bekannt; stellt sicher, dass $\frac{\partial H}{\partial p} \stackrel{!}{=} \dot{q}$

└