

Phasenraum ($\equiv$ Zustandsraum)

$$\mathbb{T} = \{ x = (q, p) \mid q \in \mathbb{R}^f, p \in \mathbb{R}^f \} = \mathbb{R}^{2f}$$

Hamiltonsches Vektorfeld

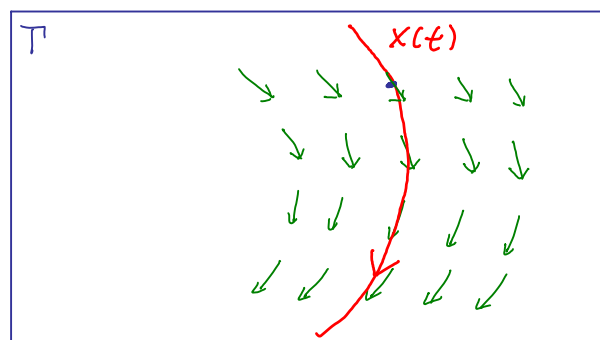
$$V : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$$
$$x = (q, p) \mapsto V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_f} \\ \ominus \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \ominus \frac{\partial H}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Hamiltonsche Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_1}(q(t), p(t)) \\ &\vdots \\ \dot{q}_f &= \frac{\partial H}{\partial p_f} \\ \dot{p}_1 &= \ominus \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ &\vdots \\ \dot{p}_f &= \ominus \frac{\partial H}{\partial q_f} \end{aligned} \right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\dot{x}(t) = V(x(t))} \quad (*)$$

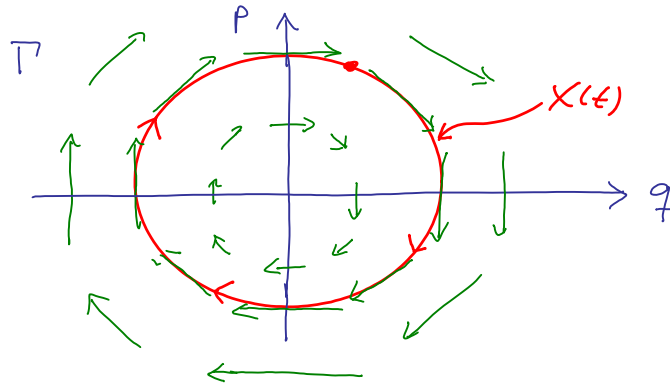


- Hamiltonsche Vf V beschreibt den Hamiltonschen Fluss in $\mathbb{T}$
- die Phasenraumbahnen $x(t)$ sind genau die Stromlinien des Hamiltonschen Flusses

(d.h. $x(t)$ ist Lösung der DGL (*) und damit per def. Integralkurve des Hamilt. Vektorfeldes V)

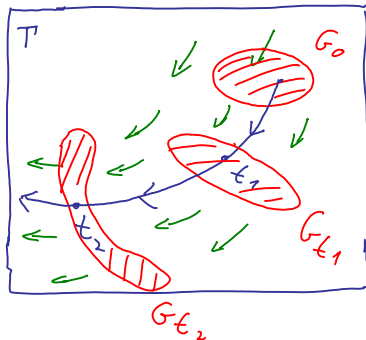
Beispiel: 1D Harm. Oszillator, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$

$$\rightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix}$$



Satz von Liouville

Der Hamiltonsche Fluss ist inkompressibel (d.h. Volumenerhaltend).



$$|G_0| \stackrel{!}{=} |G_t| \quad \text{für alle } t$$

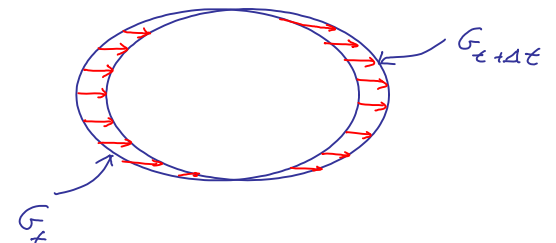
$$\left| G \right| := \int_G \underbrace{d^d q \, d^d p}_{d^d \Gamma} 1 \quad : \quad \text{"Phasenraumvolumen von } G \text{"}$$

Inkompressibilität des Flusses ist direkte Folge seiner Divergenzfreiheit,

$$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{2d} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial V_i}{\partial q_i} + \frac{\partial V_{d+i}}{\partial p_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^f \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)}_{\parallel \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\ominus \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\parallel \ominus \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}} \right) = 0.$$

dannit:



$$\rightarrow |G_{t+\Delta t}| - |G_t| \stackrel{!}{=} \int_{\partial G_t} \Delta t \underbrace{\vec{V} d\vec{f}}_{\text{Stokes}} = \Delta t \int_{G_t} \underbrace{\text{div } V}_{\parallel 0} dT = 0!$$

d.h. $\frac{d}{dt} |G_t| = 0$ und damit $|G_t|$ konstant.

bemerkenswerte Folge des S.v.L. ist der

Wiederkehrsatz (Poincaré)

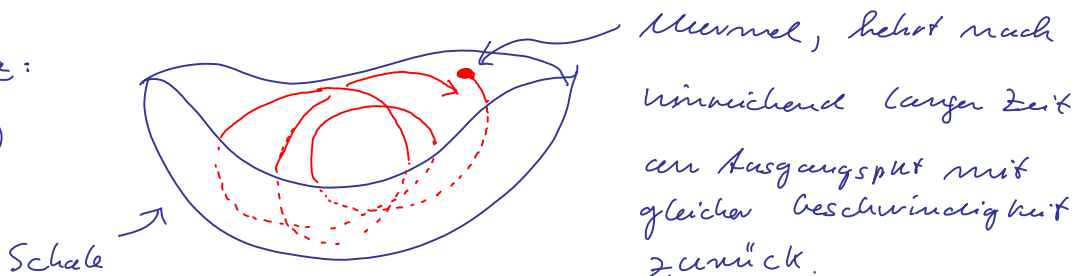
prob: Jedes beschränkte, autonome System kehrt nach hinreichend langer Zeit beliebig nahe an seinen Ausgangszustand zurück.

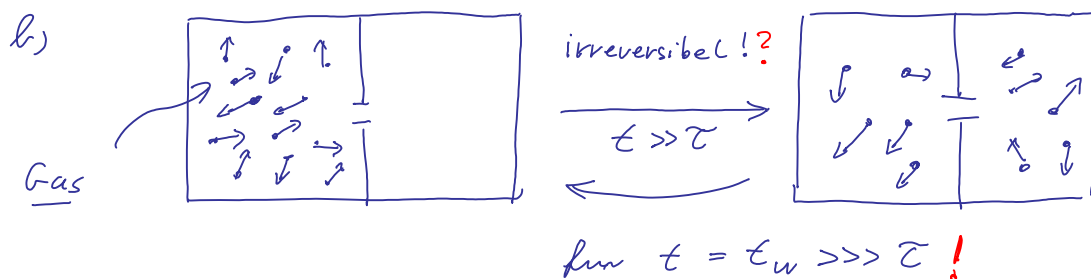
autonom : $\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

beschränkt : $\Leftrightarrow T_E := \{x \in T \mid H(x) \leq E\} \subset T$
ist für alle E eine beschränkte Menge, insbes. $|T_E| < \infty$.

etwa:

a)





Boltzmann: Wiederkehrzeit t_w für makroskopische Systeme extrem groß:

$t_w \gg \text{Alter des Universums!}$

(vgl. Aufgabe 27.)

präzise Version des Wiederkehrsatzes:

In jedem (beliebig kleinen!) Gebiet $G_0 \subset \Gamma$ gibt es Zustände, die nach hinreichend langer Zeit in G_0 zurück kehren.

Beweis:

wähle Zeit $T > 0$ beliebig, betrachte

$$G_0, G_T, G_{2T}, G_{3T}, \dots \subset \Gamma_E \subset \Gamma$$

$\uparrow \quad \hookrightarrow E = \max_{G_0} H$
 Energieerhaltung

wegen $|G_0| = |G_{nT}|$ für alle n , $|\Gamma_E| < \infty$
 und $G_{nT} \subset \Gamma_E$ gibt es $h \leq l \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\begin{aligned}
 & G_{hT} \cap G_{lT} \neq \emptyset \\
 \hookrightarrow & G_{(h-1)T} \cap G_{(l-1)T} \neq \emptyset \\
 & \vdots \\
 \hookrightarrow & G_0 \cap G_{(l-h)T} \neq \emptyset
 \end{aligned}$$

d.h. es gibt einen Zustand $x_0 \in G_0$, der nach $t = (l-h)T$ in G_0 zurück gekehrt ist $\square$