Poissonklammer

physikalische Größe $\hat{=}$ Phasenraumfunktion

$$A : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = (q, p) \longmapsto A(x)$$

$\ulcorner$ etwa kinetische Energie $\hat{=}$ $T : \Gamma \to \mathbb{R}$
$$(q,p) \longmapsto p^2/2m \quad \lrcorner$$

falls Größe explizit zeitabhängig:

$$A : \Gamma \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, t) \longmapsto A(x,t)$$

$\rightarrow$ zeitliche Änderung einer Größe A

$\hat{=}$ zeitliche Änderung einer Phasenraumfkt $A(x,t)$ längs Phasenraumbahn $x(t)$:

$$A(t) = A(x(t), t)$$

$\rightarrow$ $\boxed{\frac{dA}{dt}(t) = ?}$

mittels Kettenregel und $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ erhalten wir:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

mit Poisson-Klammer $\{B, C\}$ zweier Phasenraum-fkten B, C definiert durch

$$\{B, G\} := \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

erhalten wir also:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t}}$$

<u>insbesondere</u> für $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$:

- $\frac{dA}{dt} = \{H, A\}$
- A Erhaltungsgröße $\Longleftrightarrow$ $\{H, A\} = 0$

aus letzterem folgt wegen $\{H, H\} = 0$ (s. u.):

Im jedem autonomen System (d.h. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) ist H Erhaltungsgröße, genannt „Energie".

<u>allgemeine Eigenschaften der Poisson-Klammer</u>

- $\{A, B\} = -\{B, A\}$ (Antisymmetrie)
- $\{\underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{\lambda} A + B, G\} = \lambda \{A, G\} + \{B, G\}$ (Linearität)
- $\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\} B$ (Produktregel)
- $\{A, f(B)\} = f'(B) \{A, B\}$ falls $f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell x^\ell$
- $\{A, \{B, G\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$

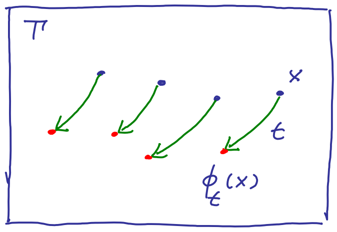
(Jacobi-Identität)

(Beweis durch Hinschreiben)

Symmetrien und Erhaltungsgrößen

↳ eines Hamilt. Systems bzgl. kontinuierlicher Transformationen des Phasenraums

Prototyp einer kont. Trafo ist der Hamiltonsche Fluss ϕ ≡ t-abhängige Abb:



$$\Phi_t : \Gamma \longrightarrow \Gamma$$
$$x \longmapsto \phi_t(x)$$

so, dass

1. $\Phi_0(x) = x$
2. $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = V_H(\phi_t(x))$

↳ $V_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$

(d.h. $X(t) := \phi_t(x_0)$ ist Integralkurve des Hamiltonschen Vektorfeldes mit $X(0) = x_0$: $\dot{x}(t) = V_H(x(t))$)

für autonome Systeme ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) gilt offenbar:

$$\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1} = \phi_{t_2 + t_1}$$

→ Verallgemeinerung:

- wähle beliebige Phasenraumfunktion $F : \Gamma \to \mathbb{R}$
- betrachte F als Hamilton-Fkt bzgl. Zeitentwicklung in fiktiver Zeit s

→ kontinuierliche Transformation Φ^F ≡ Hamilt. Fluss bzgl. F :

$$\Phi^F_s : \Gamma \to \Gamma$$
$$x \mapsto \Phi^F_s(x)$$

definiert durch

1. $\Phi^F_0(x) = x$, 2. $\frac{d}{ds}\phi^F_s(x) = V_F(\phi_s(x))$

mit V_F Hamilt. Vektorfeld bzgl. F:

$$V_F(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_f} \\ -\frac{\partial F}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial F}{\partial q_f} \end{pmatrix}$$

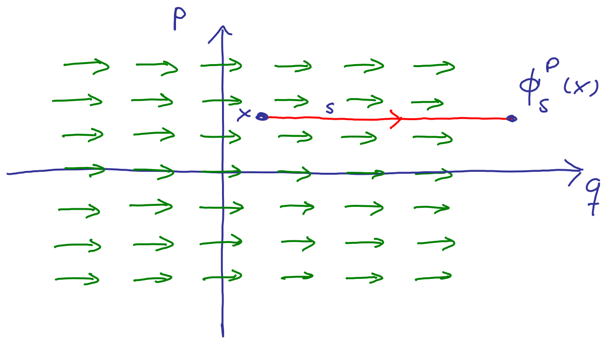
<u>Beispiele</u>:

1) 1D Teilchen, Koordinate q, Impuls p

d.h. $x = (q, p) \in \Gamma = \mathbb{R}^2$

wähle $F = p$:

$$\rightarrow \quad V_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial p} \\ -\frac{\partial p}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \quad \phi_s^p(q,p) = \begin{pmatrix} q+s \\ p \end{pmatrix},$$ Translation um s

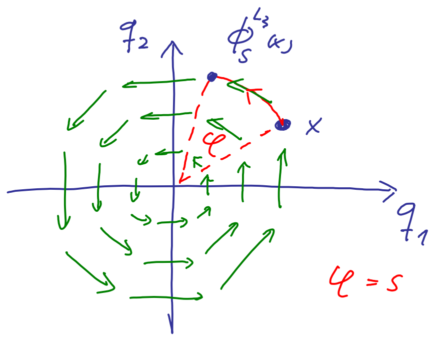
$$\boxed{\text{Impuls } p \text{ generiert Translation des Orts}}$$

2. 3D Teilchen, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$

wähle $F = L_3 = (\vec{q} \times \vec{p})_3 = (q_1 p_2 - q_2 p_1)$

$$\rightarrow \quad V_{L_3} = \begin{pmatrix} -q_1 \\ q_2 \\ 0 \\ -p_2 \\ +p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vf. V_{L_3} im $q_1 q_2$ - Ebene:



(in $p_1 p_2$ - Ebene analog)

d.h. $\phi_s^{L_3}(\vec{q}, \vec{p}) = \begin{pmatrix} R_{3,s}\,\vec{q} \\ R_{3,s}\,\vec{p} \end{pmatrix}$, $R_{3,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um Winkel $\varphi = s$ um q_3-Achse

$\boxed{\text{Drehimpuls generiert Rotation}}$

<u>Definition</u>

Φ^F kontinuierliche Symmetrie von H

$:\Longleftrightarrow \quad H(x) = H(\Phi_s^F(x))$

für alle s, alle $x \in \Gamma$

nun gilt für bel. $F : \Gamma \to \mathbb{R}$:

<u>Φ^F kont. Symmetrie von H</u>

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{dH}{ds}(\phi_s^F(x)) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \overbrace{\frac{dq_i}{ds}}^{\frac{\partial F}{\partial p_i}} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \overbrace{\frac{dp_i}{ds}}^{-\frac{\partial F}{\partial q_i}} \right)_{\phi_s^F(x)}$$

$$\overset{!}{\Longleftrightarrow} \quad \{F, H\} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{H, F\} = 0$$

$\Longleftrightarrow$ <u>F Erhaltungsgröße</u>

dies ist der **Satz von Noether:**

$$\boxed{\text{Jeder kontinuierlichen Symmetrie entspricht eine Erhaltungsgröße.}}$$

(Hamiltonsche Version)

Beispiele 1, 2) und Tatsache, dass H einerseits trivialerweise Symmetrie von H und andererseits H Generator der Zeittranslation ($\phi_t^H(x) \overset{!}{=} x(t)$) zeigen:

Kont. Symmetrie	Erhaltungsgröße
Translation	(Gesamt-) Impuls
Rotation	(Gesamt-) Drehimpuls
Zeittranslation	(Gesamt-) Energie

⌈ eine allgemeinere Version des S. v. N. zeigt zudem:

Galilei-Invarianz $\longleftrightarrow$ Schwerpunktserhaltung ⌋