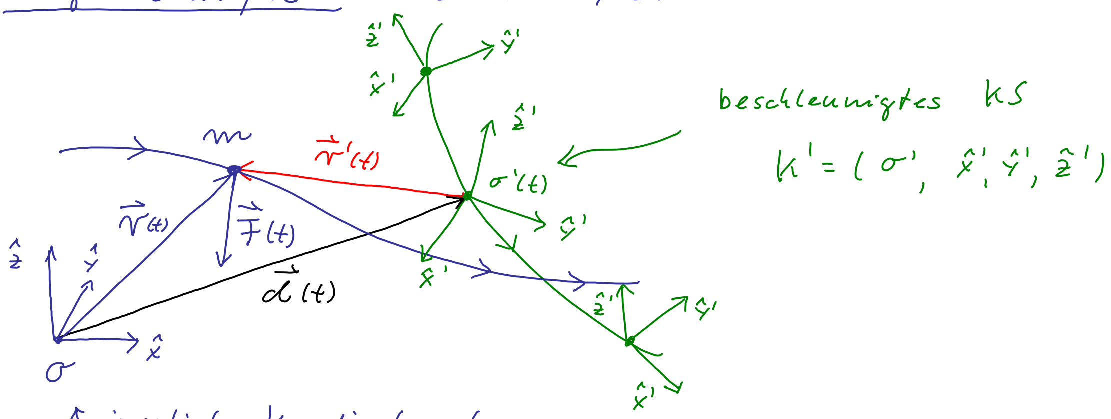
Beschleunigte Koordinatensysteme und Trägheitskräfte ($\equiv$ Scheinkräfte)



↑ inertiales Koordinatensystem

$K = (\sigma, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

Koordinatensystem K' sei gegeben durch:

$$\overrightarrow{\sigma'(t)\,\sigma} = \vec{d}(t)$$

$$\hat{x}'(t) = R(t)\,\hat{x}$$

$$\hat{y}'(t) = R(t)\,\hat{y}$$

$$\hat{z}'(t) = R(t)\,\hat{z}$$

zeitabhängige, orthogonale 3×3 Matrix, transformiert ONS $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ auf ONS $(\hat{x}'(t), \hat{y}'(t), \hat{z}'(t))$

wenn $\hat{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{\hat{x},\hat{y},\hat{z}}$, $\hat{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}_{\hat{x},\hat{y},\hat{z}}$, $\hat{z}' = \dots$;

dann $R = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{pmatrix}$ $\rightarrow \hat{x}' \hat{=} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ usw.

es gilt $R R^T = R^T R = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, d.h. $R^{-1} = R^T$

Transformation von $\vec{r}, \vec{F}$ auf $\vec{r}', \vec{F}'$ mittels $\vec{d}(t)$ und $R(t)$ gemäß:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= R^T(t)\,(\vec{r}(t) - \vec{d}(t)) \\ \vec{F}'(t) &= R^T(t)\,\vec{F}(t) \end{aligned}} \quad (*)$$

da K <u>inertiales</u> KS genügt $\vec{r}(t)$ Newtonscher Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(t)$$

K' i.d.R. <u>kein</u> inertiales KS,

$$\boxed{\text{Problem: Welche Bewegungsgleichung genügt } \vec{r}\,'(t) \text{ im } K'\text{?}}$$

zuerst betrachten wir den einfacheren Fall $\hat{x}' = \hat{x}$, $\hat{y}' = \hat{y}$, $\hat{z}' = \hat{z}$

d.h. $R(t) = \mathbb{1}$:

$\rightarrow$ $\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{d}(t)$, $\vec{F}'(t) = \vec{F}(t)$ $(\vec{d}' = \vec{d})$

und somit

$$m\ddot{\vec{r}}\,'(t) = \underbrace{m\ddot{\vec{r}}(t)}_{\substack{\| \\ \vec{F}(t) \; (= \vec{F}'(t))}} - m\ddot{\vec{d}}(t)$$

also $$m\ddot{\vec{r}}\,'(t) = \vec{F}(t) - m\ddot{\vec{d}}(t)$$

Beobachter K' interpretiert $-m\ddot{\vec{d}}(t)$ $\left(\text{„} \ddot{\vec{d}}'(t)\right)$ als <u>Trägheitskraft</u> ($\equiv$ Scheinkraft)

$$\vec{F}_B'(t) := -m\ddot{\vec{d}}\,'(t) \qquad (\text{„Beschleunigungskraft“})$$

und erhält damit eine „echte“ Newtonsche Bwgsgl. für $\vec{r}\,'(t)$:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}\,'(t) = \vec{F}'(t) + \vec{F}_B(t)}$$

<u>Beispiel:</u> vgl. Übungen,

<u>allg. Fall</u>: $R = R(t)$, $\vec{r}\,' = R^T(\vec{r} - \vec{d})$

$$\rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}}\,'(t) = m\Big(\underbrace{R^T\ddot{\vec{r}} + \ddot{R}^T\vec{r} + 2\dot{R}^T\dot{\vec{r}}\Big) - \frac{d^2}{dt^2}\vec{d}\,'}_{\ddot{\vec{d}}'}(t)$$

$$= R^T\Big(\underbrace{m\ddot{\vec r}}_{\vec F} + \underbrace{mR\ddot R^T\vec r}_{=\,\underbrace{-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec v)}_{\vec F_z}\;\underbrace{-\,m\dot{\vec\omega}\times\vec r}_{\vec F_t}} + \underbrace{2mR\dot R^T\dot{\vec r}}_{=\,2m\vec\omega\times\vec v\,=\,\vec F_c}\Big) - \ddot{\vec d}$$

d.h. $\vec r\,'(t)$ genügt der Newt. Bwgsgl.:

$$\boxed{m\ddot{\vec r}\,'(t) = \vec F' \underbrace{-\,m\vec\omega\,'\times(\vec\omega\,'\times\vec r\,')}_{\vec F_z'} \underbrace{-\,m\dot{\vec\omega}\,'\times\vec r\,'}_{\vec F_t'} \underbrace{-\,2m\vec\omega\,'\times\vec v\,'}_{\vec F_c}}$$

<u>Zentrifugal</u>- <u>Tangential</u>- <u>Coriolis-Kraft</u>