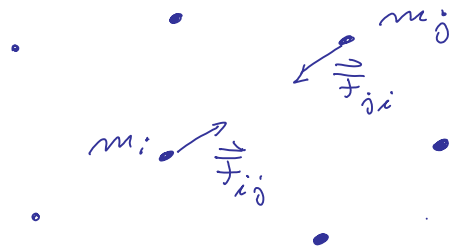


Erhaltungsgrößen eines Newtonschen N -Teilchen Systems

N MPe mit Massen $m_1, \dots, m_N$
an Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$



z.B. Gas, Flüssigkeit,
Festkörper,
Polymer
 $\vdots$
Planetensystem
Galaxie

+ { interne Kräfte $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ ($\stackrel{III}{=} -\vec{F}_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$
 $\parallel \vec{r}_j - \vec{r}_i$)

{ externe Kräfte $\vec{F}_i^{\text{ex}}(\vec{r}_i)$

→ Kraft auf i -ten MP:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \vec{F}_i^{\text{ex}}(\vec{r}_i)$$

→ N Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t))$$

$\hat{=}$ $3N$ gekoppelte DGLen 2. Ordnung ;

damit alle Teilchenorte $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)$ zu
beliebigen Zeiten $t \in]-\infty, +\infty[$ eindeutig bestimmt,
falls z.B. $\vec{r}_1(0), \dots, \vec{r}_N(0)$ und $\dot{\vec{r}}_1(0), \dots, \dot{\vec{r}}_N(0)$
gegeben !

→ „Determinismus des Newtonschen Universums“:

Aus (bekanntem) Zustand $\{\vec{r}_i(t_0), \vec{v}_i(t_0)\}$ zu einem Zeitpunkt t_0 folgt der Zustand $\{\vec{r}_i(t), \vec{v}_i(t)\}$ zu beliebiger Zeit t .

- analytische Lösungen i.d.R. nur für $N \leq 2$
- numerische Lösungen für $N \leq 10^4, \dots, 10^5$

Wir zeigen:

In einem abgeschlossenen System (d.h. $\vec{F}_i^{\text{ex}} = \vec{0}$) sind
Gesamtimpuls

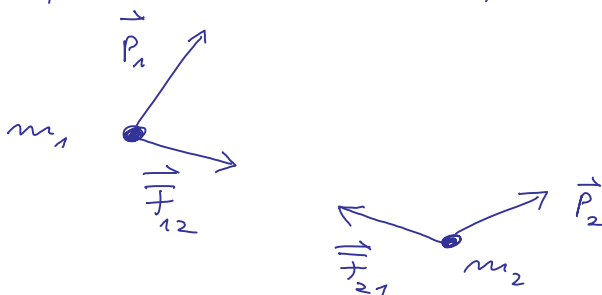
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \quad (= \sum_i m_i \vec{v}_i)$$

und Gesamt Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \quad (= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

Zeitlich konstant und der Schwerpunkt des Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{V} = \vec{P}/M$, wobei $M = \sum_i m_i$ die Gesamtmasse.

der Einfachheit halber zuerst für $N=2$:



Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\rightarrow \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Newton (ii)}}}{=} \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Newton (iii)}}}{=} \vec{0}$$

d.h. $\vec{P}(t)$ konstant.

Gesamt Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

$$\text{mit } \dot{\vec{L}}_1 = \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{p}_1) = \underbrace{\dot{\vec{r}}_1 \times \vec{p}_1}_{= \vec{0}, \text{ da } \dot{\vec{r}}_1 \parallel \vec{p}_1} + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}$$

Newton (iii)

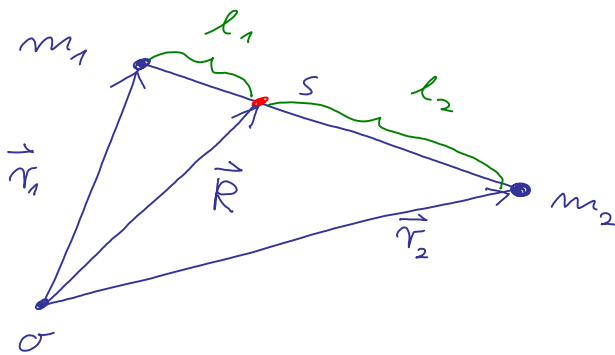
und analog $\dot{\vec{L}}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \stackrel{\text{Newton (iii)}}{=} \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

d.h. $\vec{L}(t)$ konstant.

Schwerpunktsbewegung:



Schwerpkt S teilt Verbindungsstrecke im umgekehrten Verhältnis der Massen:

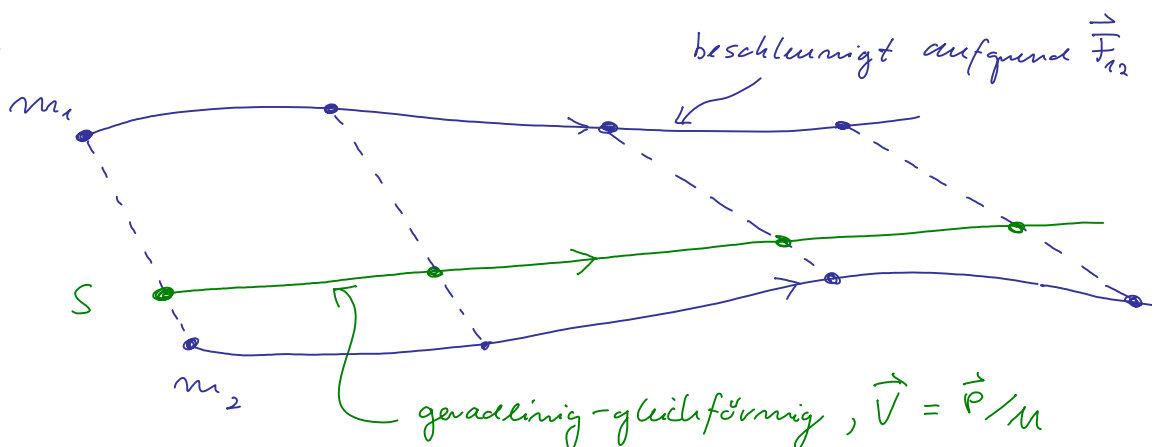
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

→ S besitzt Ortsvektor $\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$
(vgl. Übungen)

$$\rightarrow \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = \frac{\vec{P}}{M} =: \vec{V}, \text{ konstant!}$$

$$\text{d.h. } \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V} t$$

etwa:



für allg. Teilchenzahl N :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}} &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \stackrel{\text{Newton (ii)}}{=} \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) \stackrel{\text{Newton (iii)}}{=} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = \vec{0} \quad \checkmark\end{aligned}$$

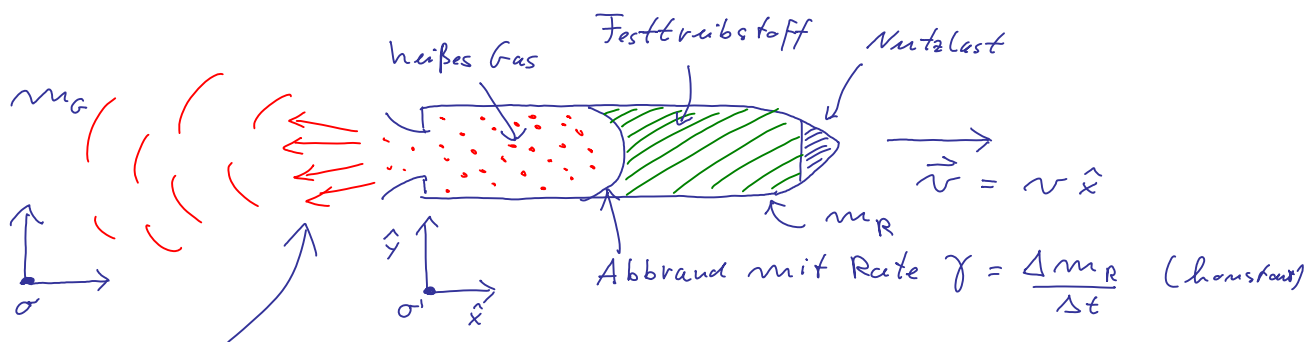
$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \stackrel{\text{Newton (ii)}}{=} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji})\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Newton (iii)}}{=} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0} \quad \checkmark$$

$\parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}/M, \text{ konstant!} \quad \checkmark$$

Beispiel: Bestimmung der Beschleunigung einer Rakete mittels Impulserhaltung:



Gasausstoß mit Geschw. $\vec{u} = -u \hat{x}$

Startgeschw. $v_0 = 0$

Startmasse m_0

Endmasse (Nutzlast) m_1

Gasgeschw. u

Rate γ

Endgeschwindigkeit $v_1 = ?$

$(\vec{\sigma} \vec{\sigma}' = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0) t)$

Erhaltung des Gesamtimpulses $\vec{p} = \vec{p}_{\text{Gas}} + \vec{p}_{\text{Raket}}$

bzgl. momentanen Ruhesystem σ' führt auf

$$0 = \dot{p}'_{\text{Gas},x} + \dot{p}'_{\text{Rakete},x} \stackrel{!}{=} -\gamma \mu + m_R(t) a'(t)$$

$$\rightarrow \dot{v}(t) \equiv a(t) = a'(t) = \frac{\gamma \mu}{m_R(t)} = \frac{\gamma \mu}{m_0 - \gamma t}$$

Beschl. der Rakete bzgl.

raumfesten Pkt σ

$$\rightarrow v_1 - v_0 = \int_0^t \frac{\gamma \mu}{m_0 - \gamma t} dt = -\mu \ln(m_0 - \gamma t) \Big|_0^{t_1}$$

$$\text{d.h.} \quad \boxed{v_1 = \mu \ln \frac{m_0}{m_1}} \quad (\text{Zidkowski 1903})$$

zur Beschleunigung einer Nutzlast m_1 auf v_1 benötigt man also die Treibstoffmasse $m_0 - m_1 = m_1 (e^{\frac{v_1}{\mu}} - 1)$

z.B. Saturn V: $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, $\mu = 2600 \text{ m/s}$

$$v_1 = 7900 \text{ m/s}$$

$$m_1 = 100 \text{ t} \quad (2. + 3. Stufe + Mondfähre)$$

$$\rightarrow m_0/m_1 = e^{v_1/\mu} = e^{3,0} \approx 21$$

$$\rightarrow m_{\text{Treibstoff}} = \underline{\underline{20 \cdot m_1 = 2000 \text{ t.}}}$$