Wie verhalten sich $\vec{P}$, $\vec{L}$ und $\dot{\vec{R}}$ bei Anwesenheit externer Kräfte?

mit externer Gesamtkraft $\vec{F}^{ex} = \sum_i \vec{F}_i^{ex}$

und externem Drehmoment $\vec{M}^{ex} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ex}$

erhalten wir jetzt:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\sum_{i,j} \vec{F}_{ij}}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{wie gehabt}}} + \sum_i \vec{F}_i^{ex} = \vec{F}^{ex}$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \dot{\vec{\ell}}_i = \underbrace{\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{wie gehabt}}} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ex} = \vec{M}^{ex}$$

somit gilt der

Satz

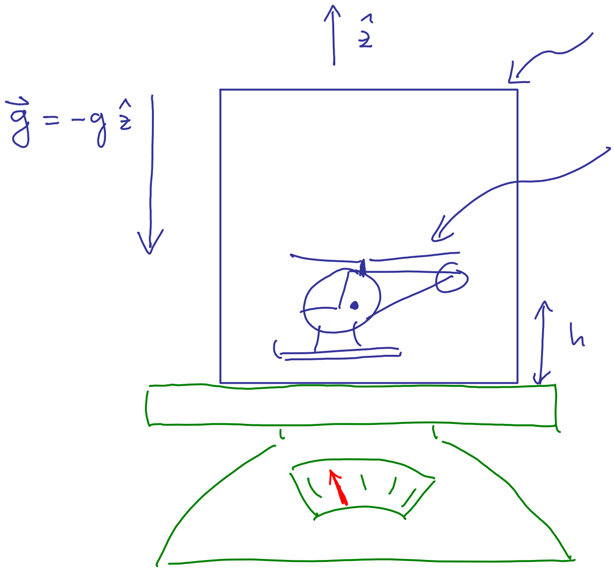
Gesamtimpuls $\vec{P}$, Schwerpunktsvektor $\vec{R}$ und Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ eines N-Teilchen-Systems genügen den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ex}$$
$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ex}$$
$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ex}$$

[entsprechend Bwg.glen eines Massenpunkts:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$
$$\dot{\vec{\ell}} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{M}$$]

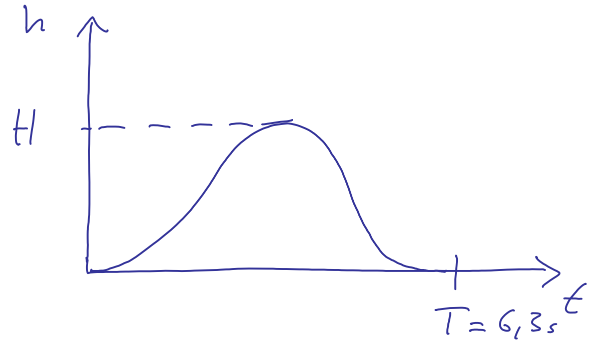
Wir nutzen diesen Satz zur Lösung des folgenden Problems:



geschlossener Behälter (Masse $m_B = 1kg$)

Modellhubschrauber (Masse $m_H = 100g$)

verändert Höhe h seines Schwerpunkts gemäß:



Was zeigt die Waage für $0 \le t \le T$ an?

System Behälter (+ eingeschl. Luft) und Hubschrauber besitzt Schwerpunktsvektor

$$(1) \qquad \vec R = \frac{1}{M}\left(m_B \vec R_B + m_H \vec R_H\right), \qquad M = m_B + m_H$$

und unterliegt externen Kräften

1) Schwerkraft $\vec F_S = m_B \vec g + m_H \vec g = M \vec g$
$= -Mg\,\hat z$

2) Kontaktkraft der Waage $\vec F_W$

obigen Satz besagt:
$$M \ddot{\vec R} = \vec F_W + \vec F_S \equiv \vec F^{ex}$$
↑ externe Gesamtkraft auf System

Waage mißt
$$W := \frac{1}{g} F_{W,z} = \frac{1}{g}\left(-F_{S,x} + M \ddot R_z\right)$$
$$= M + \frac{M \ddot R_z}{g}$$

im statischen Fall $\ddot R_z = 0$ und damit $W_0 = M$ ✓

für $h(t) \neq$ konst erhalten wir aus (1)
$$M \ddot R_z = m_H \ddot h(t)$$

d.h. $$\boxed{W(t) = M + m_H \frac{\ddot{h}(t)}{g}}$$ $g = 10 \frac{m}{s^2}$

etwa $h(t) = \frac{H}{2}\left(1 - \cos \omega t\right)$, $H = 1m$

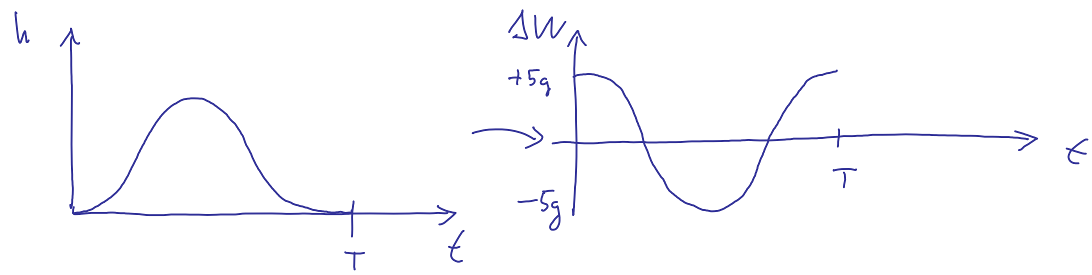
$\omega = \frac{2\pi}{6{,}3s} = 1/s$

$\rightarrow \quad \ddot{h}(t) = \frac{H\omega^2}{2} \cos \omega t$

$$\rightarrow \quad \Delta W(t) = W(t) - W_0 = \underbrace{\frac{m_H H \omega^2}{2g}} \cos \omega t$$

$$= 100g \frac{m/s^2}{20\, m/s^2} = 5g.$$

d.h.



analog: