Verallgemeinerter Energiesatz

MP unterliege konservativer Kraft mit Potenzial U und einer zusätzlichen beliebigen Kraft $\vec{K}(t)$; dann genügt Gesamtenergie $E(t) = \frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}(t)|^2 + U(\vec{r}(t))$

$$\boxed{\frac{dE}{dt}(t) = \vec{K}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t) =: P(t)}$$

Leistung der Kraft $\vec{K}$ an MP

denn:

$$\dot{E}(t) = (\underbrace{m\ddot{\vec{r}}(t)}_{\substack{\| \text{ Newton (ii)} \\ \vec{F}(\vec{r}(t)) + \vec{K}(t)}} - \vec{F}(\vec{r}(t)))\cdot\dot{\vec{r}}(t) = \vec{K}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)$$

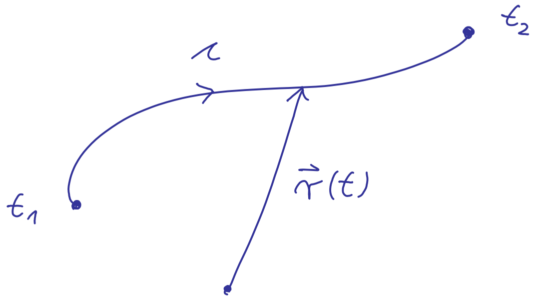
Falls $\vec{K} = \vec{K}(\vec{r}(t), t)$ dann ergibt Integration $\int_{t_1}^{t_2} dt$:

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t} P(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{K}(\vec{r}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \int_c \vec{K}\,d\vec{\ell} =: W,$$

die von $\vec{K}$ am MP verrichtete Arbeit

hierbei ist c der durch $\vec{r}(t)$ durchlaufene Weg:



Falls zudem $\dot{\vec{r}}(t_{1/2}) = 0$, dann

$$W \equiv \int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{l} = U(\vec{r}(t_2)) - U(\vec{r}(t_1))$$

! Vorsicht: oft wird statt $\vec{K}$ Gegenkraft $\vec{K}_G = -\vec{K}$ betrachtet; dann

$$W = - \int_{\mathcal{C}} \vec{K}_G\, d\vec{l}$$

Energiesatz für N-Teilchen System mit konservativen Wechselwirkungen und externen Kräften:

- $\vec{F}_i^{ex}(\vec{r}_i) = -\operatorname{grad} U_i(\vec{r}_i)$

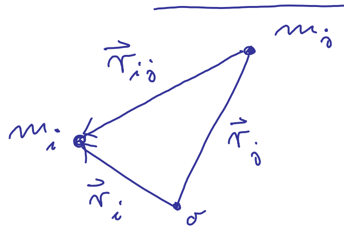
  externes Potenzial $U_i(\vec{r})$

- $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -U'_{ij}(r_{ij})\, \hat{r}_{ij}$

  Wechselwirkungspotenzial $U_{ij}(r) = U_{ji}(r)$

  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

etwa Gravitation: $U_{ij}(r) = -G\dfrac{m_i m_j}{r}$



$$\rightsquigarrow \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\, \hat{r}_{ij}$$

- Bahnen $\vec{r}_i(t)$ erfüllen wie immer $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{ex} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$

- kinetische Energie: $T(t) = \sum_i \frac{m_i}{2} |\dot{\vec{r}}_i(t)|^2$

- potenzielle Energie:

$$V(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} U_{ij}(|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|)}_{\text{Wechselwirkungsenergie}} + \underbrace{\sum_i U_i(\vec{r}_i(t))}_{\text{externe potenzielle Energie}}$$

Energiesatz

Die Gesamtenergie $E = T(t) + V(t)$ eines N-Teilchen Systems mit konservativen Kräften ist konstant.

Beweis als Übung.

Keplers Gesetze und Newtons Gravitation

Kontroverse bis in das 17. Jhdt.:

Universum heliozentrisch oder geozentrisch?

Tycho Brahe (1564 - 1601): Entscheidung durch Beobachtung!

→ Observatorium "Sternenburg" (Ostseeinsel Ven)

20 jährige Beobachtung seh hoher Genauigkeit:

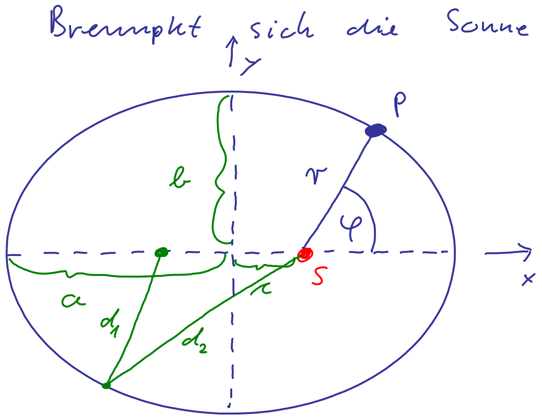
$$\Delta \varphi \le 1' - 2' \quad \left(1' \equiv 1\,\text{Bogenminute} = \tfrac{1}{60}\,\text{Grad} \mathrel{\hat{=}} \tfrac{1}{30}\,\text{Mond}\,\varnothing \right)$$

Johannes Kepler (1571 - 1630)

deduziert aus Brahes Daten

Keplersche Gesetze

1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in denen einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.



• $d_1 + d_2 \overset{!}{=} 2a$

$\Longleftrightarrow$ • $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\Longleftrightarrow$ • $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$

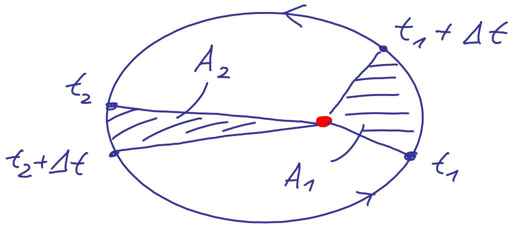
mit

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$$

$$p = (1 - \varepsilon^2)\, a$$

	ε
Merkur	0.21
Venus	0.01
Erde	0.02
Mars	0.09
Jupiter	0.05
Saturn	0.06

2) <u>Flächensatz</u>:



$$A_2 = A_1$$

3) T_i : Umlaufzeit , a_i : große Halbachse ,

$$\boxed{\frac{T_i^2}{a_i^3} = c}$$

<u>Warum</u> bewegen sich Planeten auf Kepler-Bahnen?

<u>Newton</u>: 1) auch Himmelskörper genügen den allg. Gesetzen der Mechanik

2) Planeten unterliegen der Schwerkraft der Sonne

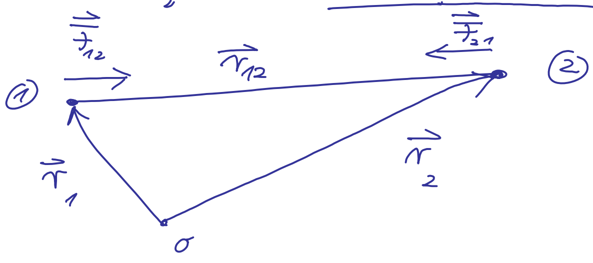
genauer:

<u>Newtonsches Gravitationsgesetz</u>

Zwei Massenpunkte an Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wechselwirken gravitativ gemäß

$$\vec{F}_{12} = - G \frac{m_1^s m_2^s}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} ,$$

wobei m_1^s bzw. m_2^s die <u>schwere Masse</u> von MP 1 bzw MP2.



$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2/kg^2}$: Gravitationskonstante

<u>verblüffende Tatsache</u>: im Schwerefeld fallen alle Körper mit <u>derselben Beschleunigung</u>, unabhängig von Größe, Form, Material des Körpers!

$\rightarrow$ <u>schwere Masse</u> m_s und <u>träge Masse</u> m_t sind strikt proportional, d.h.

$$\frac{m_s}{m_t} = \alpha \quad ,$$

α nimmt für <u>jeden</u> Körper <u>denselben universellen</u> Wert an.

durch obige Wahl von G erreicht man $\alpha = 1$;

Diese „Äquivalenz von schwerer und träger Masse" ist Ausgangspkt von Einsteins <u>allgemeiner Relativitäts-Theorie</u>.

experimentell: $\left| \frac{m_s}{m_t} - 1 \right| \lesssim 10^{-13}$ (1999)