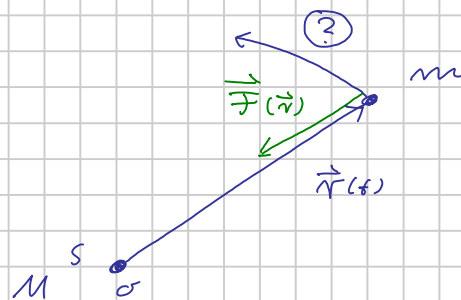


Bestimmung der Bahn eines Planeten:

Zunächst: Sonne ruhe in σ (= inertialer Bezugspkt)



Planet erfährt konservative Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{\alpha}{r^2} \hat{r}, \quad \alpha = G M m$$

Potenzial: $U(r) = - \frac{\alpha}{r}$

suchen allg. Lsg $\vec{r}(t)$ der Bwge. $m \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$

1) Drehimpuls des Planeten ist konstant:

$$m \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) = \vec{L}$$

$$\left[\text{denn } \dot{\vec{L}}(t) = \dot{\vec{M}} = \dot{\vec{r}}(t) \times \underbrace{\vec{F}(\vec{r}(t))}_{\text{parallel } \vec{r}} = 0 \right] \checkmark$$

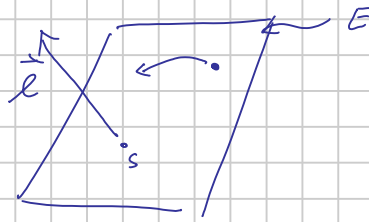
Implikationen:

(i) Planetenbahn ist eben!

für alle t $\vec{r}(t) \in E \subset \mathbb{R}^3$

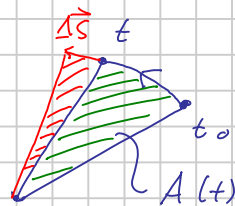
Bewegungsebene E ist def. durch

$$\vec{l} \perp E, \quad \sigma \in E$$



┌ denn $\vec{r}(t) \cdot \vec{l} = \vec{r}(t) \cdot (m \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)) = 0$ ┘

(iii) Flächensatz: $\frac{dA}{dt} = \text{konst.}!$



denn die „Flächengeschwindigkeit“ $f(t) \equiv \frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left| \frac{\vec{r}(t) \times \Delta \vec{s}}{\Delta t} \right|$

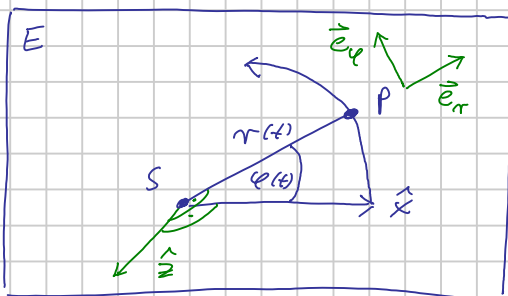
$$= \frac{1}{2} \frac{|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) \Delta t|}{\Delta t} = \frac{|\vec{l}|}{2m}$$

ist zeitlich konstant!

Merke: Flächensatz gilt aufgrund Drehimpulserhaltung
und damit für alle Zentralkräfte!

2) Ebene Bahn erlaubt Beschreibung durch

Polarkoordinaten:



$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow \vec{l} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{z}$$

ins besondere $l \equiv |\vec{l}| = m r^2 \dot{\varphi}$

$\rightarrow$ Azimuthalgleichung:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2}$$

Gesamtenergie:

$$\frac{l^2}{m^2 r^4}$$

$$E = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + U(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r)$$

d.h.

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{U_{\text{eff}}(r)} + U(r)$$

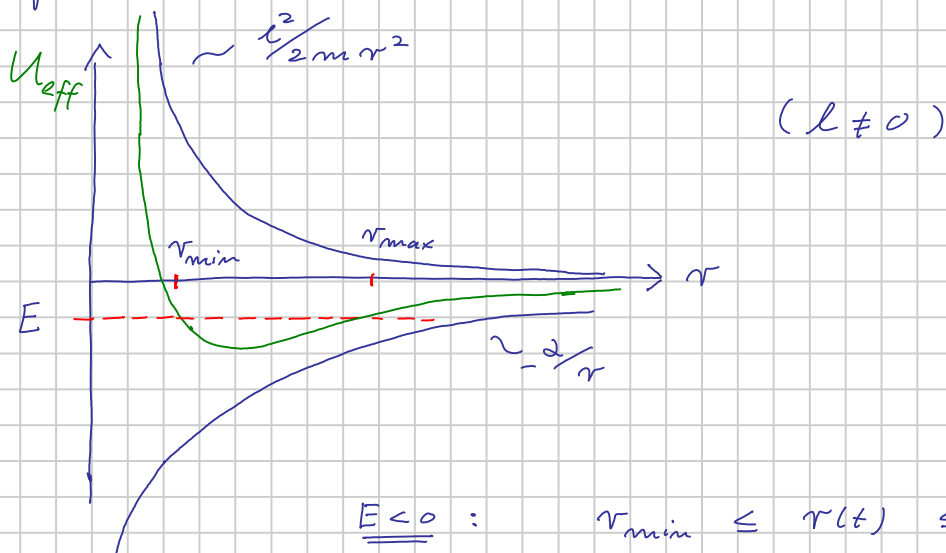
$\hat{=}$ Energiegleichung eines MPs in 1D (Koordinate $r(t)$)
im effektiven Potenzial

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

$\uparrow$ zentrifugal potenzial $\uparrow$ eigentliches Potenzial

hier: $U(r) = -\frac{d}{r} \Rightarrow U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{d}{r}$

$\rightarrow$ qualitative Diskussion von $r(t)$:



$E < 0$: $r_{\min} \leq r(t) \leq r_{\max}$
gebundene Bewegung

