Definition

λ ist <u>Eigenwert von A</u> $\in \mathcal{L}(V)$ g.d.w. es einen Vektor $u \neq 0_V$ gibt mit

$$\boxed{Au = \lambda u}$$

Jeder Vektor $u \neq 0$, der diese Gleichung erfüllt ist <u>Eigenvektor zum Eigenwert λ</u>. Der <u>Eigenraum</u> zu λ ist

$$E_\lambda := \{ u \in V \mid Au = \lambda u \}. \qquad (*)$$

Eine Basis B' von V, die nur aus Eigenvektoren besteht, ist eine <u>Eigenbasis von A</u>.

A ist <u>diagonalisierbar</u> g.d.w. A eine Eigenbasis besitzt.

$(*)$: E_λ ist für <u>alle</u> $\lambda \in \mathbb{K}$ definiert.

Bemerkungen:

1) $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda\, id)$

2) E_λ UVR von V

3) λ Eigenwert von $A \iff E_\lambda \neq \{0_V\}$

4) Ist B' Eigenbasis von A, so ist ${}_{B'}A_{B'}$ <u>diagonal</u>, d.h.

$${}_{B'}A_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad \lambda_i: \text{ EW mit EV } b_i'$$

zu 1): $Au = \lambda u \iff Au - \lambda u = 0 \iff (A - \lambda\, id)u = 0 \iff u \in \operatorname{Ker}(A - \lambda\, id)$

zu 2) E_λ UVR nach 1)

zu 3) λ EW $\Rightarrow$ es gibt $u \neq 0$ mit $Au = \lambda u \Rightarrow u \in \operatorname{Ker}(A - \lambda\, id)$

also $\operatorname{Ker}(A - \lambda\, id) \neq \{0_V\}$.

ist $\operatorname{Ker}(A - \lambda\, id) \neq \{0_V\}$ so gibt es $u \neq 0$ mit $(A - \lambda\, id)u = 0$;

also λ EW von A.

zu 4) i-te Spalte a_i von ${}_{B'}A_{B'}$ ist Bild des i-ten Basisvektors b_i'

$\equiv$ Eigenvektor zu EW λ_i

$$\rightarrow \quad a_i = {}_{B'}(A\, b_i') = {}_{B'}(\lambda_i b_i') = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$$

Lemma

λ Eigenwert von $A \iff \det(A - \lambda\, id) = 0$

ist λ EW von A so ist nach 1) $E_\lambda \neq \{0_V\}$; d.h. $\operatorname{Ker}(A - \lambda\, id) \neq \{0_V\}$ und deshalb $A - \lambda\, id$ nicht bijektiv $\Rightarrow \det(A - \lambda\, id) = 0$.

Ist $\det(A - \lambda\, id) = 0$ so ist $(A - \lambda\, id)$ nicht bijektiv und deshalb $\operatorname{Ker}(A - \lambda\, id) \neq \{0_V\}$ $\rightarrow$ es gibt $u \in \operatorname{Ker}(A - \lambda\, id)$, $u \neq 0$; d.h. $Au = \lambda u$; also λ EW von A.

Definition: Charakteristisches Polynom von $A \in \mathcal{L}(V)$:

$$\boxed{P_A(t) := \det(A - t\, id)} \quad \left(= \det({}_B A_B - t\, \mathbb{1}_n) \right)$$

B: bel. Basis von V

z.B. für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) \cong M(n\times n, \mathbb{K})$:

$$P_A(t) = \det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & & & 0 \\ & t & & \\ & & t & \\ 0 & & & \ddots \; t \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det \begin{pmatrix} (a_{11}-t) & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-t) & a_{23} & & \vdots \\ \vdots & & (a_{33}-t) & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & (a_{nn}-t) \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - t) + \cdots = (-t)^n + \cdots$$

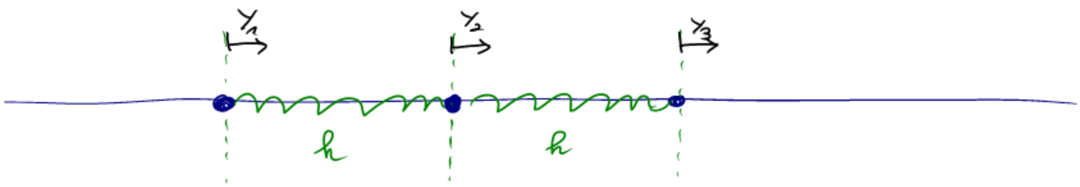
d.h. der Grad von $P_A(t)$ ist genau $\dim V$.

→ **Satz**

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind genau die Eigenwerte von A.

Anwendungsbeispiel aus der Mechanik: Schwingungen (geringer Amplitude) um stabile Gleichgewichtslage eines mechanischen Systems.

Hier: Drei Körper gleicher Masse m, 1D, gekoppelt durch Federn der Länge l_0, Federkonstante k



Auslenkungen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ der Körper aus Ruhelage genügen den Newtonschen Gleichungen

$$m\ddot{y}_1 = -k(y_1 - y_2)$$
$$m\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) - k(y_2 - y_3)$$
$$m\ddot{y}_3 = -k(y_3 - y_2)$$

Auslenkungen $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ genügt also 3D lin. DGL 2. Ordnung

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} y(t)$$

d.h. $\boxed{\ddot{y}(t) = -A\,y(t)}$ (1) mit $A = \frac{k}{m}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\tilde{A}}$

Ansatz: $y(t) = y_0 e^{i\omega t}$ eingesetzt in (1)

ergibt
$$\omega^2 y_0 = A y_0$$

also $y(t)$ Lösung von DGL (1) g.d.w. ω^2 Eigenwert von A mit Eigenvektor y_0

Bestimmung der Eigenwerte:

von $\tilde{A}$: $\quad P_{\tilde{A}}(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t) - 2(1-t)$

$$= (1-t)\{(1-t)(2-t) - 2\} = (1-t)\{-3t + t^2\}$$

d.h. $\quad P_{\tilde{A}}(t) = (1-t)\,t\,(t-3)$

$\rightarrow$ mit Nullstellen $\hat{=}$ EWen $\tilde{\lambda}_1 = 1,\ \tilde{\lambda}_2 = 0,\ \tilde{\lambda}_3 = 3$

Bestimmung der Eigenvektoren $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ mittels

$$(\tilde{A} - \lambda_i \mathbb{1})\, u^{(i)} = 0$$

ergibt

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

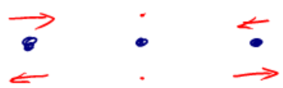
wegen $A = \frac{k}{m} \tilde{A}$ besitzt A die Eigenwerte $\lambda_i = \frac{k}{m} \tilde{\lambda}_i$

mit denselben Eigenvektoren;

$\rightarrow$ drei linear unabhäng. Lösungen

$$y^{(l)}(t) = a\, u^{(l)} e^{i \omega_l t}, \quad \text{wobei} \quad \omega_l = \sqrt{\frac{k}{m} \tilde{\lambda}_i}$$

$\underline{\underline{l = 1}}$:



$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\underline{\underline{l = 2}}$

$\omega_2 = 0$ (!)

$l = 3$

$\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{3}\, \omega_1$