Tensorprodukt

Motivation: Quantenmechanik

System A: n einander ausschließende Messergebnisse

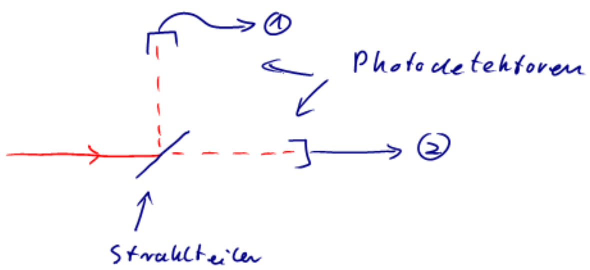
$A_1, A_2, \dots, A_n$

$\hat{=}$ n orthonormale "Zustands-" Vektoren

$a_1, a_2, \dots, a_n \in V$

Zustandsraum von A

z.B. Photon:



$n = 2$

System B: m einander ausschließende Messergebnisse

$B_1, B_2, \dots, B_m$

$\hat{=}$ m orthonormale "Zustands-" Vektoren

$b_1, b_2, \dots, b_m \in W$

Zustandsraum von B

$\rightarrow$ kombiniere A und B gedanklich zu einem

Gesamtsystem (AB): kombinierte Messungen ergeben offenbar $n \cdot m$ einander ausschließende Messergebnisse

$A_1 B_1,\ A_1 B_2,\ \dots,\ A_1 B_m,$

$A_2 B_1,\ A_2 B_2,\ \dots,\ A_2 B_m$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$A_n B_1, \; A_n B_2, \; \ldots, \; A_n B_m$$

$\hat{=}$ $\underline{\underline{n \cdot m}}$ orthonormale Zustands-Vektoren $\in \underline{\underline{V \otimes W}}$,

Zustandsraum von AB

bezeichnet durch

$$\begin{array}{llll} a_1 \otimes b_1, & a_1 \otimes b_2, & \ldots, & a_1 \otimes b_m, \\ a_2 \otimes b_1, & a_2 \otimes b_2, & \ldots, & a_2 \otimes b_m, \\ \vdots & & & \\ a_n \otimes b_1, & a_n \otimes b_2, & \ldots, & a_n \otimes b_m \end{array}$$

$\rightarrow$ Def.: Tensorprodukt zweier $\mathbb{K}$-VRe V und W

$$V \otimes W \equiv \mathrm{Span}\{a_i \otimes b_j\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ Basis von V,

$b_1, \ldots, b_m$ Basis von W;

Tensorprodukt $\otimes : V \times W \to V \otimes W$

$$v, w \longmapsto v \otimes w,$$

Addition sowie Skalarmultiplikation auf $V \otimes W$ genügen per definitionem den Regeln

1) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$

2) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$

3) $\lambda (v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

(d.h. Tensorprodukt linear in beiden Faktoren) ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Basen $a_1, \ldots, a_n$ bzw. $b_1, \ldots, b_m$?

Ja! denn $\mathrm{Span}\{a_i \otimes b_j\} \overset{!}{=} \mathrm{Span}\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$:

„$\subset$" klar ✓

„$\supset$": $V \ni v = v^i a_i$, $W \ni w = w^j b_j$

dann $v \otimes w = (v^i a_i) \otimes (w^j b_j)$

$$\overset{1),2),3)}{=} v^i w^j \, a_i \otimes b_j \in \mathrm{Span}\{a_i \otimes b_j\}$$

also $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\} \subset \mathrm{Span}\{a_i \otimes b_j\}$;
wegen Abgeschlossenheit des Spanns unter Linearkombinationen dann auch $\mathrm{Span}\{v \otimes w\}_{\substack{v \in V \\ w \in W}} \subset \mathrm{Span}\{a_i \otimes b_j\}$

<u>Bemerkungen</u>:

1) Offenbar $\{a_i \otimes b_j\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ <u>Basis</u> von $V \otimes W$

und damit

$$\boxed{\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W}$$

2) ⚠ <u>Vorsicht</u>: i.A. $u \in V \otimes W$ <u>nicht</u> als Tensorprodukt zweier Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ darstellbar; d.h. für alle $v \in V$, $w \in W$

$$u \neq v \otimes w$$

(aber u natürlich Linearkombination geeigneter $v_i \otimes w_j$: $\quad u = \sum_{i,j} v_i \otimes w_j$)

Beispiel : $\quad V = W = \mathbb{C}^2 \equiv \mathrm{Span}\left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$

$$\rightarrow \quad V \otimes W \equiv \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathrm{Span}\left\{ \binom{1}{0} \otimes \binom{1}{0}, \binom{1}{0} \otimes \binom{0}{1}, \binom{0}{1} \otimes \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \otimes \binom{0}{1} \right\}$$

z.B. $\quad u = \binom{1}{0} \otimes \binom{1}{0} + \binom{0}{1} \otimes \binom{0}{1}$ nicht als einfaches Tensorprodukt darstellbar !

quantenmechanische Zustände von AB mit derartigem $u \in V \otimes W$ als Zustands-Vektor nennt man verschränkt (engl.: entangled).

Tensorprodukt zwei Endomorphismen (Operatoren)

$$\mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(W) \longrightarrow \mathcal{L}(V \otimes W)$$
$$A \, , \, B \longmapsto A \otimes B$$

def. durch $\quad (A \otimes B)(v \otimes w) := (Av) \otimes (Bw) \qquad (*)$

und linearen Fortsetzung für alle weiteren $u \in V \otimes W$

d.h. für $u = \sum_{ij} v_i \otimes w_j$ ist

$$(A \otimes B)\, u = \sum_{ij} (A \otimes B)(v_i \otimes w_j) \overset{(*)}{=} \sum_{ij} (Av_i) \otimes (Bw_j)$$

N-faches Tensorprodukt der VRe $V_1, V_2, \dots, V_N$

$N>2$: $$\bigotimes_{i=1}^{N} V_i \equiv V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_N$$
$$= \underbrace{\left(\bigotimes_{i=1}^{N-1} V_i \right)}_{(N-1)\text{-faches TP}} \otimes V_N \qquad \text{(rekursiv)}$$

$N=2$: wie zuvor.

Notation: $$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_\ell) \otimes v_{\ell+1} \equiv v_1 \otimes \cdots \otimes v_\ell \otimes v_{\ell+1}$$

$$\rightsquigarrow \quad \bigotimes_{i=1}^{N} V_i \overset{!}{=} \operatorname{Span}\{ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_N \mid v_i \in V_i \}$$

ist $\{ a_{i_1}, \dots, a_{i_{m_i}} \}$ Basis von V_i, dann offenbar

$$\{ a_{i_1}, \dots, a_{i_{m_i}} \}_{\underline{\underline{i=1,\dots,N}}} \text{ Basis von } \bigotimes_{i=1}^{N} V_i$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dim\left(\bigotimes_{i=1}^{N} V_i \right) = \prod_{i=1}^{N} \dim V_i}$$

Notation: falls $V_i \equiv U$ schreiben wir

$$\bigotimes_{i=1}^{N} U \equiv \underbrace{U \otimes U \otimes \cdots \otimes U}_{N \text{ mal}} \equiv U^{\otimes n}$$

somit $$\boxed{\dim(U^{\otimes n}) = (\dim U)^n}$$

Beispiel: Was ist die Dimension des Zustandraums von 300 "Spins"?

1 Spin $\equiv$ elementares mag. Moment, z.B. eines Ag-Atoms,

Q.M.: Spin besitzt genau zwei orthog. Zustände

(Messung des mag. Moments zeig im Stern-Gerlach-Ex. nur genau zwei Messwerte: $\pm\mu_0$!)

$\rightarrow$ Zustandsraum eines Spins $\mathcal{U}_1 \overset{!}{=} \mathbb{C}^2 = \operatorname{Span}\left\{ \underset{\underset{\uparrow}{\shortparallel}}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\underset{\downarrow}{\shortparallel}}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \right\}$

d.h. $\dim \mathcal{U}_1 = 2$

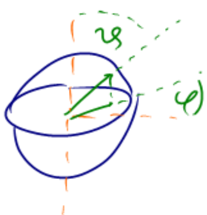
$\rightarrow$ Zustandsraum der 300 Spins: $\mathcal{U}_{300} = \mathcal{U}_1^{\otimes 300}$

d.h. $\dim \mathcal{U}_{300} = 2^{300} = (\underset{\underset{10^3}{\shortparallel}}{2^{10}})^{30} \approx \underline{\underline{10^{90}}}$!

(das uns sichtbare Universum hat "nur" etwa 10^{80} Protonen!)

300 klassische Spins sind erheblich einfacher:

1 klass. Spin beschr. durch Richtungsvektor $\vec{n} \in S_2$:



$\rightarrow$ klass. Zustand $x = (\varphi, \vartheta) \in [0, 2\pi[\times [0, \pi[$

zwei reelle Parameter

$\rightarrow$ 300 klass. Spins beschr. durch $n_{300} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_{300}) \in S_2^{300}$,

entsprechend $\underline{\underline{600}}$ reellen Parametern!