Cauchyscher Integralsatz

$U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph,
$c \subset U$ geschlossener Weg; dann

$$\int_c f(z)\,dz \stackrel{!}{=} 0$$

Statt eines elementaren Beweises führen wir hier diesen Satz auf uns bekannte Ergebnisse der mehrdimensionalen Analysis zurück:

- rotationsfreies Vf. auf einf. zusammenhäng. Gebiet ist <u>konservativ</u>
- Wegintegral über <u>kons.</u> Vf. längs geschl. Weg verschwindet.

dazu betrachten wir $\mathrm{Re}/\mathrm{Im} \int_c f(z)\,dz$ als <u>reelle</u> Wegintegrale:

$$f = u + iv \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ; \quad c(t) = x(t) + iy(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{c}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \int_c f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(c(t))\,\dot{c}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[(u\dot{x} - v\dot{y}) + i(v\dot{x} + u\dot{y}) \right] dt$$

$u = u(c(t))$
$v = v(c(t))$

d.h. $$\mathrm{Re} \int_c f(z)\,dz = \int_c \vec{F}\,d\vec{l} \quad \text{mit } \vec{F} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im} \int_c f(z)\,dz = \int_c \vec{G}\,d\vec{l} \quad \text{mit } \vec{G} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$$

u und v als Real- und Imaginärteil der holomorphen Fkt. f erfüllen Cauchy-Riemannsche DGLen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ,$$

weshalb $\quad (\text{rot}\,\vec{F})_z = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

und $\quad (\text{rot}\,\vec{G})_z = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

also $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ und $\text{rot}\,\vec{G} = 0$; da zudem U einf. zshgnd. und c geschlossen sind $\vec{F}$ und $\vec{G}$ konservativ und

$$\int_c \vec{F}\,d\vec{l} = 0 \quad \text{und} \quad \int_c \vec{G}\,d\vec{l} = 0 \quad ; \text{ d.h. } \int_c f(z)\,dz = 0 \; .$$

Anwendung:

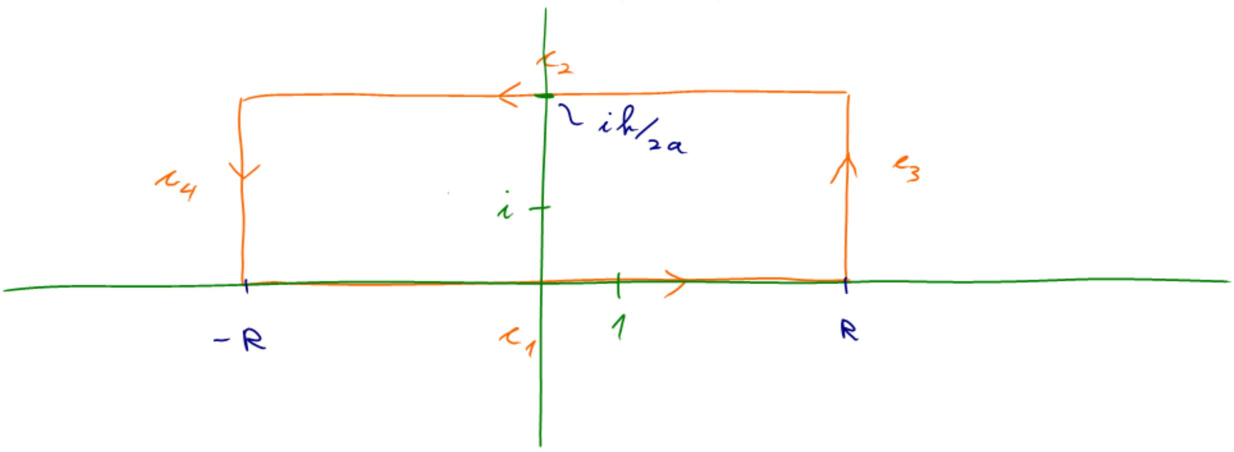
behauptlich $\quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/4a}} \qquad (*)$

abgeleitet aus $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ und Substitution $u = x - b/2a$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx \cdot e^{-b^2/4a} \qquad \rightarrow (*)$$

(*) auch gültig für $b \in \mathbb{C}$? (etwa $b = ik$, $k \in \mathbb{R}$)

betrachte dazu folgenden Weg $c_R \subset \mathbb{C}$:



d.h. $\quad c_R = c_1 + c_3 + c_2 + c_4$

mit $\quad c_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad u \longmapsto u$

$c_2 : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad x \longmapsto -x + ik/2a$

$c_3 : [0, k/2a] \to \mathbb{C}, \quad t \longmapsto R + it$

$c_4 : [0, k/2a] \to \mathbb{C}, \quad t \longmapsto -R + i\frac{k}{2a} - it$

$$\to \quad I_1 \equiv \int_{c_1} e^{-az^2}\, dz = \int_{-R}^{R} e^{-au^2}\, du \xrightarrow{R\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$I_2 \equiv \int_{c_2} e^{-az^2}\, dz = -\int_{-R}^{R} e^{-ax^2 + ikx}\, e^{-k^2/4a}\, dx \xrightarrow{R\to\infty} -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ikx}\, dx\, e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

$$I_3 = \int_{c_3} e^{-az^2}\, dt = i\int_{0}^{k/2a} e^{-aR^2}\, e^{-2iaRt}\, e^{-at^2}\, dt \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

ebenso $\quad I_4 \longrightarrow 0$ für $R \to \infty$;

nun ist e^{-az^2} holomorph auf $\mathbb{C}$ und $c_R = c_1 + c_3 + c_2 + c_4$ geschlossen, weshalb nach C. Integralsatz

$$0 \overset{!}{=} \int_{c_R} e^{-az^2}\, dz = I_1 + I_3 + I_2 + I_4$$

im limes $R \to \infty$ also $\quad -I_2 = I_1$, d.h.

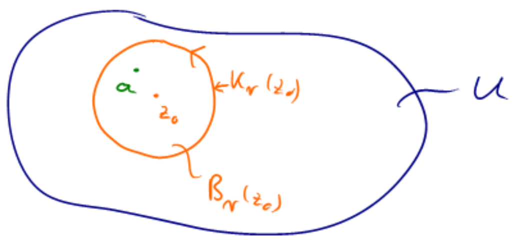
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ikx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-k^2/4a}$$

Cauchysche Integralformel

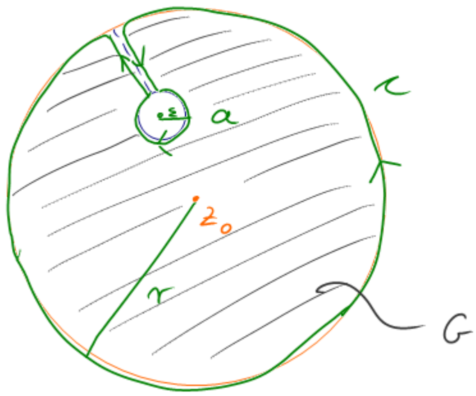
$f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset U$;

Für alle $a \in \mathring{B}_r(z_0)$ ist

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-a}\, dt}$$



Zum Beweis der Formel betrachte folg. geschl. Weg c als Rand ∂G des einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset U \setminus \{a\}$;



da $\dfrac{f(z)}{z-a}$ holomorph auf G

ist nach Cauchyschem Integralsatz

$$0 \overset{!}{=} \int_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

$$c \overset{!}{=} K_r(z_0) - K_\varepsilon(a)$$

$$= \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \int_{K_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

d.h.

$$\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \underbrace{\int_{K_\varepsilon(a)} \underbrace{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}_{= f'(a)} dz}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\ 0} + \underbrace{\int_{K_\varepsilon(a)} \frac{f(a)}{z-a}\, dz}_{= 2\pi i\, f(a)} .$$

Potenzreihenentwicklungssatz

Eine holomorphe Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$ kann um $z_0 \in U$ durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ auf $B_r^\circ(z_0)$ entwickelt werden (solange $B_r(z_0) \subset U$).

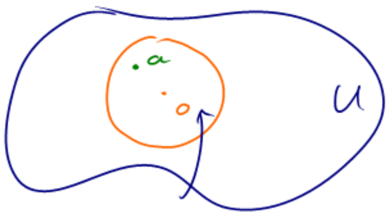
Dabei gilt:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz$$

Folgerung

Jede holomorphe Fkt. ist beliebig oft diff.bar!

$\ulcorner$ O.B.d.A. $z_0 = 0$; nach Integralformel ist



$B_r(0)$

$a \in B_r^\circ(0)$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{z-a} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-a/z}}_{= \sum_{n=0}^{\infty} (a/z)^n} \, dz$$

$|a/z| < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dx \right)}_{= b_n} a^n \quad !$$

$\lrcorner$