gängige Variablenbezeichnungen:

- Ort $x$ $\xleftrightarrow{F.T}$ Wellenzahl $k$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

- Zeit $t$ $\xleftrightarrow{F.T.}$ Frequenz $\omega$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

Anwendung der Fouriertransformation zur Lösung linearer partieller DGLen (mit konstanten Koeffizienten):

Idee: nutze „$\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{F.T} ik$"

→ Differenzialgleichung für $f(x)$ wird zur algebraischen Gleichung für $\hat{f}(k)$ !

etwa lin. DGL 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + a\frac{\partial f}{\partial x}(x) + b\, f(x) \stackrel{!}{=} h(x)$$

F.T. ↓      ↓ F.T

$$-k^2 \hat{f}(k) + ika\,\hat{f}(k) + b\,\hat{f}(k) \stackrel{!}{=} \hat{h}(k)$$

d.h. Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$ einer Lösung $f(x)$ erfüllt

$$\hat{f}(k) = \frac{\hat{h}(k)}{b - k^2 + ika}$$

→

**Beispiel:** Wärmeleitung in einer Dimension: $T(x,t)$

Wärmeleitungsgleichung: $$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$a = \frac{\lambda}{\varrho c}$ : Temperaturleitfähigkeit, $[a] = \frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}}$

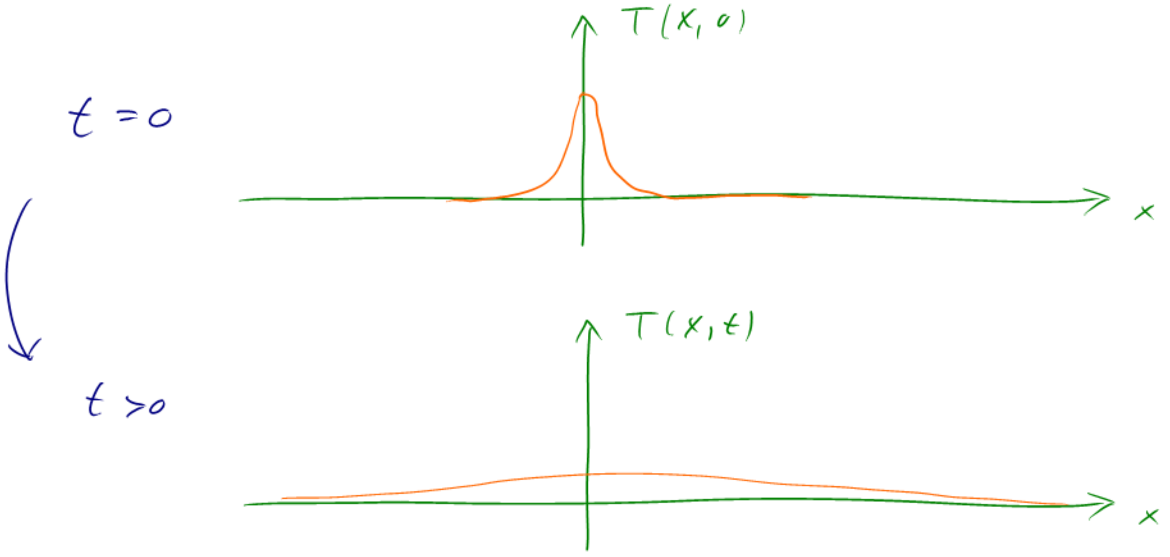
( $\lambda$: Wärmeleitfähigkeit, $\varrho$: Massendichte

$c$: spezifische Wärmekapazität )

$T(x,t)$ beschreibt etwa Temperaturverteilung in einem Draht


**Problem a):**

gegeben $T(x,0)$, bestimme $T(x,t)$ für $t>0$!



**Problem b):**

gegeben $T(0,t)$, bestimme $T(x,t)$ für $x \neq 0$ !

etwa:


$\longrightarrow x$

$$T(0,t) \overset{!}{=} \vartheta_0 \cos \Omega t$$

$$T(x_1,t) = \underline{\underline{\vartheta(x_1)}} \cos(\Omega t - \underline{\underline{\varphi(x_1)}})$$

Amplitude $\vartheta(x) = ?$

Phasenverschiebung $\varphi(x_1) = ?$

<u>zuerst Problem a):</u> $T(x,0) \xrightarrow{t} T(x,t) = ?$

Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \overset{!}{=} a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

F.T. im x

F.T. im x; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to -k^2$

$$\boxed{\frac{\partial \hat{T}(k,t)}{\partial t} \overset{!}{=} -a k^2 \hat{T}(k,t)}$$

einfache lin. DGL. 1. Ordnung vom Typ $\dot{y} = \lambda y$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\hat{T}(k,t) = \hat{T}_0(k)\, e^{-a k^2 t}} \quad (*)$$

hieraus folgt $T(x,t)$ durch inv. F.T. :

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{T}(k,t)\, e^{ikx}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{T}_0(k)\, e^{-ak^2t+ikx} \qquad (**)$$

$\hat{T}_0(k)$ ist dabei die Fouriertransformierte von $T(x,0)$; denn für $t=0$ ergibt $(**)$:

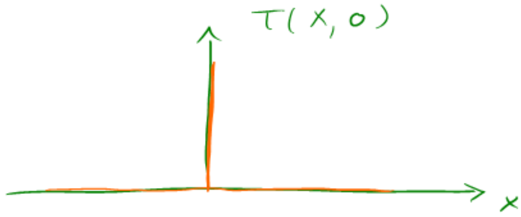
$$T(x,0) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{T}_0(k)\, e^{ikx}$$

→ Verfahren zur Lösung des Problems a)

$$T(x,0) \xrightarrow{F.T} T_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x,0)\, e^{-ikx}$$

$$\longrightarrow T(k,t) = T_0(k)\, e^{-ak^2t}$$

$$\xrightarrow{(F.T)^{-1}} T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, T_0(k)\, e^{-ak^2t+ikx}$$




z.B. $T(x,0) = \vartheta\, \delta(x)$ :

$$\longrightarrow \hat{T}_0(k) = \vartheta$$

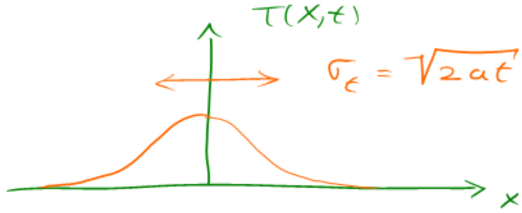
$$\longrightarrow \hat{T}_0(k,t) = \vartheta\, e^{-ak^2t}$$

$$\longrightarrow T(x,t) = \vartheta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ak^2t+ikx}$$

Gauß-Integral

$$\downarrow$$

$$= \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x^2/4at}$$



Ergänzung:

Zeitentwicklung des "Einheitstemperaturpeaks" $T(x,0) \equiv \delta(x)$ (d.h. $\vartheta = 1$) definiert sog. Wärmeleitungskern $\Gamma(x,t)$; d.h.

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-\frac{x^2}{4at}} ;$$

wegen Linearität der Wärmeleitungsgleichung und $T(x,0) \equiv \int dy\, T(y,0)\, \delta(x-y)$ erhalten wir mit $\delta(x-y) \xrightarrow{t} \Gamma(x-y,t)$ die gesuchte Lösung $T(x,t)$ zur Anfangsverteilung $T(x,0)$ gemäß

$$T(x,t) \overset{!}{=} \int dy\, T(y,0)\, \Gamma(x-y,t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} \int dy\, T(y,0)\, e^{-(x-y)^2/4at}$$

d.h. $T(x,t)$ ergibt sich aus Faltung von $T(x,0)$ mit $\Gamma(x,t)$.

Beachte:
$$\hat{T}(k,t) \overset{!}{=} \hat{T}_0(k)\, e^{-ak^2 t}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faltungssatz}}}{\overset{!}{=}} \widehat{(T_0 * \Gamma_t)}(k) \quad \checkmark$$

zu Problem b): $T(0,t) \longrightarrow T(x,t) = ?$

Lösung durch F.T von $T(x,t)$ in $t$:

Wärmeleitungsgleichung: $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} \overset{!}{=} a \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$

F.T in t; $\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$ F.T. in t

$$i\omega \hat T(x,\omega) \overset{!}{=} a \frac{\partial^2 \hat T}{\partial x^2}(x,\omega)$$

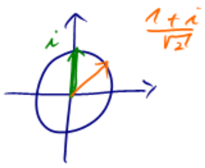
d.h. $\hat T(x,\omega)$ ist Lösung der lin. DGL 2. Ordnung

$$\boxed{\frac{\partial^2 \hat T}{\partial x^2}(x,\omega) = i\frac{\omega}{a}\hat T(x,\omega)}$$

Exponentialansatz $\hat T(x,\omega) \overset{!}{=} \alpha e^{\lambda t}$ führt auf

Bedingungsgl. $\lambda^2 \overset{!}{=} i\frac{\omega}{a}$ mit Lösungen $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)$

beachte:




; oder rein algebraisch: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-(i)^2}{2} = 1$ ✓

d.h. $\hat T(x,\omega) = \alpha_1 e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)x} + \alpha_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)x}$

wegen Endlichkeit von $\hat T(x,\omega)$ für $|x| \to \infty$ folgt

$$\hat T(x,\omega) = \begin{cases} \alpha\, e^{+\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)x} & : x < 0 \\ \alpha\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)x} & : x > 0 \end{cases}$$

d.h. genau $\hat T(x,\omega) = \alpha\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)|x|}$ ;

$\alpha \overset{!}{=} \hat T(0,\omega)$ $\longrightarrow$

$$\boxed{\hat{T}(x,\omega) = \hat{T}(0,\omega)\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)|x|}}$$

$T(x,t)$ folgt hieraus durch inv. F.T. bzgl. $t$:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \hat{T}(0,\omega)\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1+i)|x|}\, e^{i\omega t}$$

d.h. $$\boxed{T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \hat{T}(0,\omega)\, \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}|x|}}_{\text{Dämpfung}}\, e^{i\left(\omega t - \underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}|x|}_{\text{Phasenverschiebung}}\right)}}$$

(***)

z.B. $T(0,t) = \vartheta \cos \Omega t \overset{!}{=} \mathrm{Re}\, \vartheta\, e^{i\Omega t}$

$$T(0,t) = \vartheta\, e^{i\Omega t} \xrightarrow{F.T} \hat{T}(0,\omega) = 2\pi\vartheta\, \delta(\omega - \Omega)$$

$\Big\lceil$ denn $\int \frac{d\omega}{2\pi}\, 2\pi\vartheta\, \delta(\omega-\Omega)\, e^{i\omega t} \overset{!}{=} \vartheta\, e^{i\Omega t}$ ✓ $\Big\rfloor$

$$\rightarrow T(x,t) \overset{(***)}{=} \vartheta\, e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2a}}|x|}\, e^{i\left(\Omega t - \sqrt{\frac{\Omega}{2a}}|x|\right)}$$

d.h. $$\boxed{T(x,\omega) \equiv \mathrm{Re}\, T(x,t) = \vartheta\, \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{\Omega}{2a}}|x|}}_{\text{Dämpfung}} \cos\left(\Omega t - \underbrace{\sqrt{\frac{\Omega}{2a}}|x|}_{\text{Phasenverschiebung}}\right)}$$

insbesondere: Phasenverschiebung um $\pi$ verbunden durch Dämpfung um $e^{-\pi} \simeq 0{,}043$ .