Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 1

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 19.04.2020, 23:59 Uhr

Tauschen Sie sich gegenseitig über die Aufgaben aus und geben Sie in **kleinen Gruppen von zwei oder drei Studierenden** ab.

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist ein Untervektorraum?

b) W und W' seien Untervektorräume eines Vektorraums V. Welche der folgenden Teilmengen von V bilden dann ebenfalls einen Untervektorraum?

$$\{\ \}, \quad \{\vec{0}\}, \quad V, \quad W \cup W', \quad W \cap W', \quad V \setminus W$$

Was ist mit $W+W'$ gemeint? Welche Beziehung besteht zwischen den Dimensionen von $W+W'$, W, W' und $W \cap W'$?

c) Was ist eine lineare Abbildung?

d) Was ist das Bild und der Kern einer linearen Abbildung?

e) $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ sei ein normierter Vektor. Welche geometrische Bedeutung hat die lineare Abbildung

$$P_{\vec{n}} \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \vec{n} \qquad ?$$

Was sind Bild und Kern dieser Abbildung?

f) Welche geometrische Bedeutung hat die lineare Abbildung $1 - P_{\vec{n}}$? Was ist ihr Kern und was ist ihr Bild?

2. Untervektorraum und Spann *5+5+5 Punkte*

a) Welche der folgenden Mengen bilden einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^4$?

$$M_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0\}, \quad M_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0\},$$
$$M_3 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 \wedge x_2 = 1\}, \quad M_4 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 = x_3 x_4\}.$$

b) Bestimmen Sie Basen für die Untervektorräume unter **a)**.

c) Bestimmen Sie Basen für den jeweiligen Spann der Mengen unter **a)**, die keinen Untervektorraum bilden.

3. Summe und Schnitt *5 Punkte*

Bestimmen Sie Basen des Schnitts und der Summe folgender Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2\}, \quad W' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_3\}.$$

Hinweis: die Dimensionsformel für $W + W'$ erspart hier etwas Arbeit.

4. Bilder und Kerne *5+5 Punkte*

Bestimmen Sie Bild und Kern folgender linearer Abbildungen:

$$\begin{aligned} A: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, & \qquad B: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} & \vec{x} &\mapsto \langle \vec{n}_1, \vec{x} \rangle \, \vec{n}_1 + \langle \vec{n}_2, \vec{x} \rangle \, \vec{n}_2 \,. \end{aligned}$$

$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind normierte Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie jeweils die Dimensionsformel für Bild und Kern.

5. Lineare Abbildungen *3+3+3 Punkte*

Im folgenden sei A eine lineare Abbildung $V \to W$.

a) Zeigen Sie: Bild und Kern von A sind Untervektorräume von W bzw. V.

b) Zeigen Sie: Ist $\dim V = \dim W$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist injektiv

(ii) A ist surjektiv

(iii) A ist bijektiv

Hinweis: Dimensionen von Bild und Kern betrachten!

c) Das *Urbild* $A^{-1}(w)$ eines Vektors $w \in W$ unter der Abbildung A ist die Menge aller Vektoren aus V, die unter A auf w abgebildet werden:

$$A^{-1}(w) = \{v \in V | Av = w\} \,.$$

Zeigen Sie: ist $v_0 \in V$ derart, dass $Av_0 = w$, dann gilt

$$A^{-1}(w) = v_0 + \mathrm{Ker} A.$$

Hierbeit bezeichnet $v_0 + \mathrm{Ker} A$ die Menge $\{v_0 + u | u \in \mathrm{Ker} A\}$.