Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 10

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 28.06.2021, 23:59 Uhr

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

Wie lauten die Fouriertransformierten der Skalarfelder $\delta(\vec{r}-\vec{a})$, $\mathrm{e}^{i\langle\vec{k}_0,\vec{r}\rangle}$, $\sin(\langle\vec{k}_0,\vec{r}\rangle)$ und $\cos(\langle\vec{k}_0,\vec{r}\rangle)$?

2. Dreidimensionale Fouriertransformation I *5 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Funktion $f(\vec{r})=\delta(|\vec{r}|-a)$ durch

$$\hat{f}(\vec{k})=4\pi a^2\frac{\sin(ka)}{ka} \qquad (k=|\vec{k}|)$$

gegeben ist. [Hinweis: Fourierintegral in Kugelkoordinaten darstellen, dabei Polachse parallel zu $\vec{k}$ wählen.]

3. Dreidimensionale Fouriertransformation II *15 Punkte*

Auf dem $\mathbb{R}^3$ seien ein Skalarfeld f und ein Vektorfeld $\vec{A}$ durch

$$f(\vec{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\vec{r}|^2} \qquad \text{und} \qquad \vec{A}(\vec{r})=\frac{\vec{r}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\vec{r}|^2}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierten von f und $\vec{A}$.

b) Bestimmen Sie nun anhand von **a)** die Fouriertransformierten von

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}, & \mathrm{grad} f, & \mathrm{div}\vec{A}, \\ \mathrm{rot}\vec{A}, & \Delta f, & f(\vec{r}-\vec{a})\,. \end{array}$$

4. Fouriereihe *10 Punkte*

Bestimmen Sie die Fourierreihen der 2π-periodischen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}-1 & : x\in[-\pi,0[\\ +1 & : x\in[0,\pi[\end{cases}, \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

$$g(x)=x^2\in[-\pi,\pi[, \qquad g(x+2\pi)=g(x)\,.$$

5. Skalarprodukt

5 Punkte

f und g seien komplexwertige, L-periodische Funktionen mit Fourierreihen

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k_n)\mathrm{e}^{ik_n x}, \qquad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(k_n)\mathrm{e}^{ik_n x}.$$

Hierbei ist (wie immer) $k_n = \frac{2\pi}{L}n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{L}\int_0^L f^*(x)g(x)\mathrm{d}x \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}^*(k_n)\hat{g}(k_n)\,.$$

6. Diffusion

10 Punkte

Die Diffusion eines Stoffs (z.B. Wasserstoff) in einem Medium (z.B. Eisen) wird durch die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} \;=\; D\Delta c$$

beschrieben. $c = c(\vec{r}, t)$ ist die Konzentration des Stoffs am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t, D die Stoff-Medium-spezifische Diffusionskonstante und Δ der Laplace-Operator.

a) Zeigen Sie, dass

$$c(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\; \hat{c}_0(\vec{k})\, \mathrm{e}^{-D|\vec{k}|^2 t}\; \mathrm{e}^{i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung für $t > 0$ und Randwerte

$$c(\vec{r}, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\; \hat{c}_0(\vec{k})\, \mathrm{e}^{i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}$$

bei $t = 0$ ist.

b) Berechnen Sie anhand von **a)** die Diffusion eines Stoffs mit Konzentration

$$c(\vec{r}, 0) = c_0\delta(\vec{r})$$

bei $t = 0$.