Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 11

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 05.07.2021, 23:59 Uhr

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lautet die Poisson-Gleichung?

b) Wie lautet die Green-Funktion $G(\vec{r})$ der Poisson-Gleichung für Lösungen u mit Randbedingung $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} u(\vec{r}) = 0$?

c) Welche zwei Bedinungen erfüllt $G(\vec{r})$?

d) Zeigen Sie, dass $\Delta G(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$.

e) Auf welche Weise erhalten Sie für eine gegebene Inhomogenität $f(\vec{r})$ mittels der Green-Funktion $G(\vec{r})$ eine Lösung u ?

2. Geladener Ring *5+3+2 Punkte*

Ein Kreisring von Radius R sei homogen mit der elektrischen Ladung Q geladen. Der Ring liege in der z=0-Ebene mit Mittelpunkt in o. Die elektrische Ladung auf dem Ring verursacht ein elektrostatisches Potenzial ϕ, dass der Poisson-Gleichung der Elektrostatik genügt:

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \,. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie das elektrische Potenzial ϕ des Rings unter der Randbedingung $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} \phi(\vec{r}) = 0$ entlang der z-Achse.

b) Bestimmen Sie anhand des Potenzials ϕ das elektrische Feld $\vec{E}$ entlang der z-Achse. (Symmetrien beachten)

c) Überprüfen Sie, dass für $|z| \gg R$

$$\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_z}{z^2} \,.$$

3. Gladener Ring über geerdedter Metallplatte *4+4+2 Punkte*

Nun befinde sich der Ring aus Aufgabe 2 in der Ebene z=d ($d > 0$). In der Ebene z=0 befinde sich eine geerdete Metallplatte. Das Potenzial $\phi(\vec{r})$ des Rings genügt für $z > 0$ immer noch der Poisson-Gleichung (1), erfüllt nun aber die Randbedingung

$$\phi(x,y,0) = 0 \,.$$

a) Wie lautet die Green-Funktion für die vorliegende Randbedingung? (Hinweis: Bildladung!)

b) Bestimmen Sie das Potenzial des Rings entlang der z-Achse.

c) Gilt nun immer noch

$$\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_z}{z^2} \quad ?$$

4. Green-Funktion der d-dimensionalen Poisson-Gleichung *6 Punkte*

Die d-dimensionale Poisson-Gleichung ist $-\Delta u = f$ mit dem d-dimensionalen Laplace-Operator $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Zeigen Sie, dass für $d \geq 3$ die Green-Funktion $G(\vec{x})$ für die Randbedingung $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} u(\vec{x}) = 0$ gegeben ist durch

$$G(\vec{x}) = \frac{\alpha_d}{|\vec{x}|^{d-2}} \,.$$

Hierbei ist α_d eine dimensionsabhängige Konstante.