Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 12

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 12.07.2021, 23:59 Uhr

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lautet die retardierte (avancierte) Green-Funktion $G_r(t, \vec{r})$ der dreidimensionalen Wellengleichung?

b) Wie kann anhand von $G_r(t, \vec{r})$ die retardierte $u_r(t, \vec{r})$ Lösung der Wellengleichung zu einer Inhomogenität $f(t, \vec{r})$ bestimmt werden?

2. Homogene, eindimensionale Wellengleichung *4+4+4 Punkte*

Wir betrachten die homogene, eindimensionale Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \,.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion $g(x)$ die Funktionen

$$u_{\rightarrow}(t, x) := g(x - ct) \,, \qquad u_{\leftarrow}(t, x) := g(x + ct)$$

jeweils Lösungen der homogenen Wellengleichung sind.

Nun betrachten wir Lösungen $u(t, x)$ der obigen Wellengleichung zum Anfangswertproblem

$$u(0, x) = u_0(x) \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \qquad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \,. \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass die *d'Alembertsche Lösung*

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left(\, u_0(x + ct) \; + \; u_0(x - ct) \; + \; F(x + ct) \; - \; F(x - ct) \, \right) \,,$$

mit $F(x) := \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) \mathrm{d}s$, tatsächlich eine Lösung der homogenen Wellengleichung zu den Anfangswerten (1) ist.

c) Wie lautet die d'Alembertsche Lösung für

$$u_0(x) = 0 \,, \qquad u_1(x) = -x \mathrm{e}^{-x^2/2} \qquad ? \qquad (c \equiv 1)$$

Skizzieren Sie $u(t, x)$ als Funktion von x für $t_1 = 2$ und für $t_2 = 4$.

3. Zeitumkehrinvarianz

4+4 Punkte

Die *zeitumgekehrte Funktion* $\tilde{u}(t, \vec{r})$ einer Funktion $u(t, \vec{r})$ ist naheliegenderweise definiert als

$$\tilde{u}(t, \vec{r}) := u(-t, \vec{r})$$

a) Zeigen Sie: Ist u eine Lösung der Wellengleichung mit Inhomogenität f, so ist ihre Zeitumkehrung $\tilde{u}$ eine Lösung der Wellengleichung mit zeitumgekehrter Inhomogenität $\tilde{f}$.

b) Diskutieren Sie den Sachverhalt **a)** für die Lösung

$$u(t, \vec{r}) = \frac{\delta(r - ct)}{4\pi rc}$$

zur Inhomogenität $f(t, \vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r})$.

c) Die Inhomogenität in **b)** ist offenbar zeitumkehrinvariant, d.h. $\tilde{f} = f$. Gibt es auch eine zeitumkehrinvariante Lösung der Wellengleichung zu dieser Inhomogenität?

4. Komlexe Ableitung

4 Punkte

Bilden Sie die komplexe Ableitung folgender Funktionen:

$$f_1(z) = z^4\,, \qquad f_2(z) = \mathrm{e}^{-\sin^2(z)}\,, \qquad f_3(z) = \cosh(z)\,, \qquad f_4(z) = \sinh(z)\,.$$

Erinnerung: $\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$.

5. Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen

6 Punkte

Es sind die folgenden komplexen Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z^*\,, \\ f_2(z) &= |z|\,, \\ f_3(z) &= \mathrm{e}^z. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, dass die Funktionen f_1 und f_2 in allen $z \in \mathbb{C}$ *nicht* komplex differenzierbar sind, und f_3 in allen $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.