
Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 12

Sommersemester 2021

Webpage: http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: keine

1. Komplexes Wegintegral

0 Punkte

- a) Wie ist das komplexe Wegintegral $\int_c f(z)dz$ einer komplexen Funktion $f(z)$ über einen Weg c in \mathbb{C} definiert?
- b) Der Weg c_r in \mathbb{C} sei der Kreisweg mit Radius r und Mittelpunkt 0. Berechnen Sie explizit $\int_{c_r} \frac{1}{z} dz$ und $\int_{c_r} z dz$.
- c) Skizzieren Sie den Weg $c_\varepsilon : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \varepsilon e^{it}$ ($\varepsilon > 0$) und berechnen Sie

$$\int_{c_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

im Limes $\varepsilon \rightarrow 0+$.

2. Residuen

0 Punkte

- a) Wie ist das Residuum $\text{Res}(f(z), z_0)$ einer Funktion $f(z)$ an der Polstelle z_0 definiert?
- b) Bestimmen Sie folgende Residuen:

$$\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right), \quad \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right), \quad \text{Res}\left(\tan z, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{Res}\left(\frac{1}{(z-i)^3}, i\right), \quad \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^3}, i\right).$$

3. Residuensatz

0 Punkte

Bestimmen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+i} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-i} dx.$$