Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 1

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag=, den 26.04.2021, 23:59 Uhr

Tauschen Sie sich gegenseitig über die Aufgaben aus und geben Sie in **kleinen Gruppen von zwei oder drei Studierenden** ab.

1. Zur Diskussion

0 Punkte

Folgende Aufgaben sind nach Lektüre des Vorlesungsskripts einfach zu beantworten:

a) Was ist ein Operator?

b) Wie sind (positive und negative) ganzahlige Potenzen eines Operators definiert?

c) Der Operator $P : V \to V$ sei eine Projektion, d.h. es gilt $P^2 = P$. Ferner sei $Q := \mathbf{1}_V - P$ und $A := \lambda_1 P + \lambda_2 Q$. Zeigen Sie, dass

$$Q^2 = Q, \quad PQ = 0, \quad QP = 0, \quad A^n = \lambda_1^n P + \lambda_2^n Q\,.$$

d) A sei ein Operator und $f(x)$ sei eine Funktion mit Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Was ist dann mit $f(A)$ gemeint? Was ergibt sich demnach für $\sin(A)$ für den in c) definierten Operator A ?

e) Wie wirkt der Operator $\mathrm{e}^{a\frac{\partial}{\partial x}}$ (wobei a eine reelle Konstante) auf eine (hinreichend glatte) Funktion $f(x)$? Warum?

f) Wie wird die Abbildungsmatrix ${}_C A_B$ einer linearen Abbildung $A : V \to W$ bzgl. der Basen B und C von V bzw. W aufgestellt? Wozu dient ${}_C A_B$?

2. Orthogonale Projektionen

3+3+2 Punkte

$P_1, P_2, \ldots P_k : V \to V$ sei ein vollständinges System orthogonaler Projektionen; d.h. es gilt $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ und $\sum_i P_i = \mathbf{1}_V$. Ferner sei $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x)$ eine analytische Funktion mit Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zeigen Sie:

a) $A^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n P_i\,,\qquad$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

b) $f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i)\, P_i\,.$

c) Unter welchen Voraussetzungen an $f(x)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ist $f(A)$ invertierbar? Wie lautet dann $f(A)^{-1}$?

3. Lineare Unabhängigkeit

10 Punkte

$F : V \to V$ sei eine lineare Abbildung und $v \in V$, $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$F^n v \neq 0 \quad \text{und} \quad F^{n+1} v = 0\,.$$

Beweisen Sie, dass dann $v, Fv, F^2 v, \ldots, F^n v$ linear unabhängige Vektoren sind.

4. Matrixdarstellung linearer Abbildungen *8 Punkte*

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der folgenden linearen Abbildungen in der Standardbasis, wobei $\mathbb{I}$ die identische Abbildung und $\vec{n}$ ein fest gewählter normierter Vektor ist.

a) $A_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \mapsto \vec{n} \times \vec{a}$

b) $\mathcal{P}_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \, \vec{n}$

c) $l_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{a} \mapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$

d) $O_{\vec{n}} = \mathbb{I} - \mathcal{P}_{\vec{n}}$

5. Ableitungsoperator *8 Punkte*

P_k sei der Vektorraum ganzrationaler Funktion maximalen Grades k. Im Folgenden betrachten wir Basen

$$B_k = (1, x, x^2, \ldots, x^k), \quad C_k = (1, x + a, (x + a)^2, \ldots, (x + a)^k) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

und lineare Abbildungen

$$R = \frac{\partial}{\partial x} : P_3 \to P_2, \qquad S = \frac{\partial^2}{\partial x^2} : P_3 \to P_1, \qquad T = \mathrm{e}^{a \frac{\partial}{\partial x}} : P_2 \to P_2 \, .$$

Bestimmen Sie folgende Abbildungsmatrizen:

$${}_{B_2}R_{B_3}, \qquad {}_{B_1}S_{B_3}, \qquad {}_{B_2}T_{B_2}, \qquad {}_{C_2}T_{B_2}.$$

6. Multiplikation von Matrizen mit Vektoren *6 Punkte*

Wenden Sie, falls möglich, folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 47 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -8 \\ 2 & 2 \\ 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

auf die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an.