Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 3

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag=, den 03.05.2021, 23:59 Uhr

Tauschen Sie sich gegenseitig über die Aufgaben aus und geben Sie in **kleinen Gruppen von zwei oder drei Studierenden** ab.

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) $A : V \to W$ sei eine lineare Abbildung. Welche Beziehung gibt es zwischen den Dimensionen von V, $\mathrm{Im}\, A$ und $\mathrm{Ker}\, A$?

b) Weshalb können lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ nicht bijektiv sein? Welche der Abbildungen könnte surjektiv bzw. injektiv sein?

c) Wie kann das Inverse des Matrixprodukts ABC (sofern existent) anhand der Inversen von A, B und C dargestellt werden?

d) Wie kann $(ABC)^T$ durch A^T, B^T und C^T dargestellt werden?

2. Matrixmultiplikation *10 Punkte*

Gegeben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie

$$\mathbf{AB}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CC},$$

sofern möglich. Zwischen Räumen welcher Dimension bilden die entsprechenden Abbildungen ab?

b) Seien

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0)$$

und

$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, -(x_1 + x_2 + x_3)) \, .$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen von T, P, sowie $P \circ T$ bezüglich der Standardbasen und verifizieren Sie

$$_{B^2}P_{B^3}\, {}_{B^3}T_{B^2} = {}_{B^2}[P \circ T]_{B^2} \, .$$

3. Drehungen *10 Punkte*

Drehungen der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ können durch Drehmatritzen (bzgl. der Standardbasis) der Form

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

a) Zeigen Sie folgende Relationen:

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}, \qquad R_0 = \mathbf{1}, \qquad R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}, \qquad R_\alpha^{-1} = R_\alpha^T\,.$$

b) Wie ist eine Gruppe definiert? Was ist eine kommutative Gruppe?

c) Zeigen Sie, dass die Menge der Drehmatritzen $\{R_\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\}$ eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bilden. Ist diese Gruppe kommutativ?

4. Matrixexponentialfunktion *10 Punkte*

Im Folgenden sei $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$L^2 = -\mathbf{1}\,, \qquad L^3 = -L\,, \qquad L^4 = \mathbf{1}\,.$$

b) Folgern Sie aus **a)**, dass für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$L^{2k} = (-1)^k\,\mathbf{1}\,, \qquad L^{2k+1} = (-1)^k\,L\,.$$

c) Wie lauten die Potenzreihen der Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$?

d) Zeigen Sie nun mittels **b)** und **c)**:

$$\mathrm{e}^{\alpha L} \;=\; \cos\alpha\,\mathbf{1} \,+\, \sin\alpha\,L \;=\; \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,.$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ ist hier eine Konstante.

e) Welche geometrische Operation wird durch $\mathrm{e}^{\alpha L}$ beschrieben?

5. Inversion von Matrizen *10 Punkte*

a) Verfizieren Sie, dass die Inverse einer allgemeinen invertierbaren 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\,.$$

b) Invertieren Sie die folgenden Matrizen, falls möglich.

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie nun auch die Inversen von M_0^T, M_1^T and M_2^T, falls diese existieren.