Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 4

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag=, den 10.05.2021, 23:59 Uhr

Tauschen Sie sich gegenseitig über die Aufgaben aus und geben Sie in **kleinen Gruppen von zwei oder drei Studierenden** ab.

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist der Zusammenhang zwischen der Determinante einer $n \times n$-Matrix und dem orientierten Volumen eines n-dimensionalen Spats?

b) Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 8 & 5 & 1 \\ 9 & 6 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 & 5 & 8 & 10 \\ -4 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 3 & 0 \\ 10 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) A und B seien $n \times n$ Matrizen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\det A$, $\det B$ und den Determinaten der Matrizen A^T, λA, AB, A^{-1}, $A + B$?

2. Lineare Abbildung und Abbildungsmatrizen *5 Punkte*

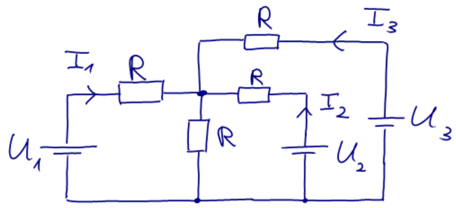
In dieser Aufgabe geht es noch einmal um den Unterschied zwischen einer lineare Abbildung einerseits und deren Abbildungsmatrizen andererseits.
V sei ein dreidimensionaler euklidischer Vektorraum mit einer ONB $B = (b_1, b_2, b_3)$. Ein normierter Vektor $n \in V$ sei gegeben durch $n = \sum_i n_i b_i$ und $P : V \to V$ sei die Projektion auf n, d.h. $Pv = \langle n, v \rangle n$. Eine weitere ONB $C = (c_1, c_2, c_3)$ von V sei so gewählt, dass $c_1 = n$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrizen ${}_BP_B$ und ${}_CP_C$.

b) ${}_Bv \in \mathbb{R}^3$ seien die Komponenten eines Vektors $v \in V$ bzgl. Basis B, ein anderer Vektor $w \in V$ sei durch Komponenten ${}_Cw \in \mathbb{R}^3$ bzgl. Basis C gegeben. Auf welche Weise erhalten Sie mit den Abbildungsmatrizen aus **a)** die Komponenten von Pv bzgl. Basis B bzw. die Komponenten von Pw bzgl. Basis C?

3. Ströme und Spannungen *10 Punkte*

Die Skizze zeigt einen Schaltkreis mit drei Spannungsquellen der Spannungen $U = (U_1, U_2, U_3)^T$. Die entsprechenden Ströme sind $I = (I_1, I_2, I_3)^T$.



a) Zeigen Sie, dass $U = \mathcal{R}I$ mit einer *Widerstandsmatrix* $\mathcal{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{R} = R \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass beispielsweise $U_1 = RI_1 + R(I_1 + I_2 + I_3)$.

b) Die Ströme I sind durch die Spannungen U über die *Leitwertmatrix* $\mathcal{G} = \mathcal{R}^{-1}$ gemäß

$$I = \mathcal{G}U$$

bestimmt. Bestimmen Sie die Leitwertmatrix für obigen Schaltkreis.

4. Matrixwertige Funktionen und Differentialgleichungen *10 Punkte*

Im folgenden wollen wir die Differentialgleichung

$$\dot{y} = A\,y \tag{1}$$

betrachten. Dabei sei A eine komplexe oder reelle $n \times n$ Matrix mit konstanten Einträgen und $y \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit n zeitabhängigen Koeffizienten.

a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) gegeben ist durch $y = e^{At}\,y_0$, wobei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein frei wählbarer konstanter Vektor ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

und skizieren sie die spezielle Lösung für den Anfangswert

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bei $t = 0$.
Hinweis: Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus sind über die beiden Potenzreihen

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

definiert.

5. Determinanten *10 Punkte*

Bestimmen Sie die Determinaten folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 9 & 2 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$