Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 5

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 17.05.2021, 23:59 Uhr

Die Übungen am Donnerstag den 13.05.2021 fallen aufgrund des gesetzlichen Feiertages Christi Himmelfahrt aus.

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lautet der Transformationsatz?

b) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die die Einheitskreisscheibe auf eine Ellipse mit Halbachsen a und b abbildet. Wie lautet ihre Jacobi-Determinante?

c) Weshalb ist die Fläche einer Ellipse mit Halbachsen a und b durch πab gegeben?

d) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Einheitskugel auf einen Ellipsoid mit Halbachsen a, b und c abbildet. Wie lautet ihre Jacobi-Determinante?

e) Weshalb ist das Volumen eines Ellipsoids mit Halbachsen a, b und c durch $\frac{4\pi}{3}abc$ gegeben?

2. Jacobi-Determinanten *4+4 Punkte*

In der Vorlesung wurde die Jacobi-Determinante für ein Koordinatensystem über eine Ellipse mit Halbachsen a und b bestimmt.

a) Bestimmen Sie analog die Jacobi-Determinante für Zylinderkoordinaten und das Volumen eines Zylinders mit Radius R_1 und Höhe H mittels Integration.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante für Kugelkoordinaten und das Volumen einer Kugel mit Radius R_2 mittels Integration.

3. Basiswechsel und Ähnlichkeitstransformationen *4+4 Punkte*

Neben der Standardbasis $B = (e_1, e_2)$ des $\mathbb{R}^2$ sei eine weitere Basis $C = (c_1, c_2)$ gegeben durch

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \qquad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2).$$

a) Wie lautet die Basiswechselmatrix S und deren Inverse S^{-1} für den Wechsel von B auf C ?

b) Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei bzgl. der Standardbasis B durch die Abbildungsmatrix

$$_BA_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie mittels der in **b)** bestimmten Basiswechselmatrix:

$$_CA_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung A?

4. Eigenwerte, Eigenräume und Eigenbasis I

4+1+1 Punkte

Der Operator

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto x - 2\langle n, x\rangle n \end{aligned}$$

mit normiertem Vektor $n = (1, 0, 0, 1)^T/\sqrt{2}$ spiegelt an einer Ebene senkrecht zu n.

a) Wie lauten die Eigenwerte und deren Eigenräume von S ?

Hinweis: Eigenvektoren und -werte einer Spiegelung an einer Ebene lassen sich leicht anschaulich erraten. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch explizite Rechnung.

b) Geben Sie eine Eigenbasis B von S an.

c) Wie lautet die Abbildungsmatrix von S bzgl. der Eigenbasis B ?

5. Eigenwerte, Eigenräume und Eigenbasis II

6+2+2 Punkte

Operatoren $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ und $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind bzgl. der jeweiligen Standardbasis gegeben durch die Abbildungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die (ggf. komplexen) Eigenwerte und deren Eigenräume der Operatoren A, B und C.

b) Geben Sie zu den Operatoren B und C jeweils eine Eigenbasis an.

c) Wie lauten die Abbildungsmatrizen von B und C bzgl. deren Eigenbasen aus **b)**?