Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 6

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 31.05.2021, 23:59 Uhr

Die Übungen am Donnerstag den 27.05.2021 fallen aus. Wir wünschen Ihnen eine gesunde und frohe Pfingstwoche!

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

λ sei Eigenwert eines Operators $A \in \mathcal{L}(V, V)$.

a) Warum ist dann λ^n ein Eigenwert von A^n und $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(A)$? (f ist eine analytische Funktion.)

b) Weshalb kann die Dimension d_λ des Eigenraums E_λ nie größer sein als die Vielfachheit m_λ der Nullstelle $x_0 = \lambda$ im charakteristischen Polynom $P(x)$ von A?
Hinweis: Erweitern Sie eine Basis $b_1, \ldots, b_{d_\lambda}$ des Eigenraums E_λ zu einer Basis von V, und stellen Sie in dieser Basis $P(x)$ dar ...

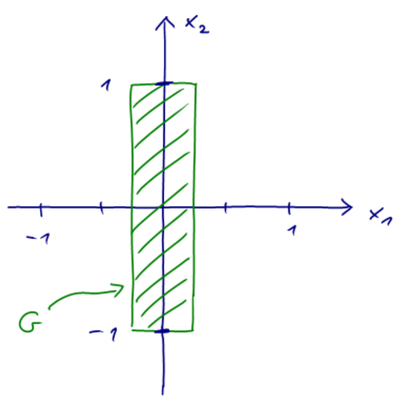
2. Scherinvarianz des Volumens *1+1+3+1+2+2 Punkte*

Eine Scherung des $\mathbb{R}^n$ parallel zur $(x_1 = 0)$-Ebene sei von der Form

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto s(x) = x + f(x_2)e_1 \, , \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig gewählte differenzierbare Funktion sei.

a) Wir betrachten obige Scherung s für $n = 2$ und $f(x_2) = x_2$. In der Abbildung ist ein zweidimensionales Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ angegeben. Skizzieren Sie das unter s transformierte Gebiet $s(G)$.



b) Nun sei $f(x_2) = x_2^2$. Skizzieren Sie wieder das transformierte Gebiet $s(G)$.

c) Bestimmen Sie für die Scherung s wie unter (1) das Differenzial $\mathrm{d}s_x$ ($\equiv$ Jacobi-Matrix Js_x) und zeigen Sie, dass $\det(\mathrm{d}s_x) = 1$.

d) Begründen Sie mittels **c)**, dass sich das n-dimensionale Volumen eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^n$ unter der Scherung s nicht verändert: $\mathrm{Vol}_n(G) = \mathrm{Vol}_n(\, s(G)\,)$.

e) Wir betrachten eine allgemeinere Scherung $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei nun

$$s(x) = \; x \; + f(x_2, x_3, \dots, x_n) e_1$$

mit einer beliebigen, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch hier $\mathrm{Vol}_n(G) = \mathrm{Vol}_n(\, s(G)\,)$.

f) Jetzt wird es eine Ecke komplizierter mit der Abbildung $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} s(x) = \; x \; &+ f_1(x_2, x_3, \dots, x_n) e_1 \\ &+ f_2(x_3, \dots, x_n) e_2 \\ &\qquad \dots \\ &\qquad \dots \\ &+ f_{n-1}(x_n) e_{n-1} \, . \end{aligned}$$

Die differenzierbaren Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ sind wieder beliebig gewählt. Zeigen Sie: es gilt immer noch $\mathrm{Vol}_n(G) = \mathrm{Vol}_n(\, s(G)\,)$.

3. Ähnlichkeit zweier Matrizen *0+2+2+2 Punkte*

a) Wann sind zwei Matrizen ähnlich zueinander?

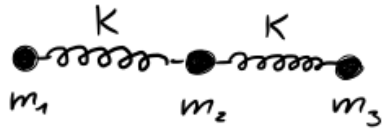
b) Zeigen Sie, dass für zwei ähnliche Matrizen A und B ebenfalls A^k und B^k mit $k \in \mathbb{N}$ ähnlich sind.

c) Es sei $f(x)$ eine Funktion mit wohldefinierter Reihendarstellung, $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l x^l$. Zeigen Sie, dass $f(A)$ und $f(B)$ auch ähnlich sind.

d) Wenn A ähnlich zu B, und B ähnlich zu C ist, dann ist auch A ähnlich zu C. Beweisen Sie dies.

4. Gekoppelte Massen *6 Punkte*

In einer Dimension bewegen sich drei Körper der Massen $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ und $m_3 = m$, die durch Federn der Federkonstante k gekoppelt sind.



Berechnen und skizzieren Sie analog zur Vorlesung die Eigenmoden des Systems.

5. Adjunktion, orthogonale und unitäre Operatoren *4+5 Punkte*

a) A sei Operator auf einem hermiteschen Vektorraum. Zeigen Sie:

- $(A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$
- $\det A^+ = (\det A)^*$
- $\frac{1}{2}(A + A^+)$ ist selbstadjungiert.
- $(cA)^+ = c^* A^+$.

b) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal bzw. unitär? (Es gilt das Standardskalarprodukt auf dem jeweiligen $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.)

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$