Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 7

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 07.06.2021, 23:59 Uhr
Die Übungen am Donnerstag, den 3.6.2021 fallen aus. Für Fragen zu den Übungsaufgaben gibt es die Fragestunde am Freitag!

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Was ist ein *normaler* Operator?

b) Nennen Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung für die *unitäre* Diagonalisierbarkeit eines Operators auf einem komplexen Vektorraum.

c) Kann man unitäre und selbstadjungierte Operatoren immer diagonalisieren?

d) Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte und -vektoren eines unitären bzw. selbstadjungierten Operators?

e) Wie lauten die Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \sin A, \quad e^A \quad ?$$

f) Bestimmen Sie jeweils die Determinante und die Spur der Matrizen in **e)**.

2. Diagonalisieren von Matrizen *4+4+4 Punkte*

a) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unitär diagonalisierbar?

c) Berechnen Sie C^{25} für die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Spur und Determinante

2+2+2+2 Punkte

a) Zeigen Sie, dass zwei ähnliche Matrizen dieselbe Spur und dieselbe Determinante besitzen.

b) Stellen Sie Spur und Determinante einer diagonalisierbaren Matrix durch deren Eigenwerte und den Eigenraumdimensionen dar.

c) Zeigen Sie $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$ für eine beliebige diagonalisierbare Matrix A.

d) Bestimmen Sie $\det(\mathrm{e}^A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Ableitung als selbstadjungierter Operator

4+2+2 Punkte

Wir betrachten den Operator $p := -i\frac{\partial}{\partial x}$ auf dem Raum der differenzierbaren, komplexwertigen, L-periodischen Funktionen.
(Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist L-*periodisch* genau dann, wenn $f(x) = f(x+L)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

a) Zeigen Sie, dass p selbstadjungiert ist bzgl. des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f^*(x)g(x)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $e^{ik_n x}$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $k_n = \frac{2\pi n}{L}$, Eigenfunktionen von p sind. Was sind die Eigenwerte von p?

c) Zeigen Sie, dass die Funktionen $e^{ik_n x}$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $k_n = \frac{2\pi n}{L}$, orthogonal zueinander sind. Warum gilt dies?

5. Hilbert-Schmidt-Produkt

0+4+4+2 Punkte

a) Wie lautet das Hilbert-Schmidt-Produkt für komplexe $n \times n$ Matrizen?

b) Zeigen Sie, dass es ein hermitesches Skalarprodukt auf dem Vektorraum der komplexen Matrizen definiert.

c) Zeigen Sie, dass folgende Matrizen bzgl. des Hilbert-Schmidt-Produkts eine Orthonormalbasis der komplexen 2×2 Matrizen bilden:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+d)E + \frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)X + \frac{i}{\sqrt{2}}(b-c)Y + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-d)Z\,.$$