

---

## Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 7

---

Sommersemester 2021

**Webpage:** [http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala\\_21.html/](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/)  
[https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto\\_uk\\_crs\\_3862464.html](https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html)

**Abgabe:** Montag, den 07.06.2021, 23:59 Uhr

Die Übungen am Donnerstag, den 3.6.2021 fallen aus. Für Fragen zu den Übungsaufgaben gibt es die Fragestunde am Freitag!

### 1. Zur Diskussion

0 Punkte

- Wie wird das Tensorprodukt  $V \otimes W$  zweier Vektorräume  $V$  und  $W$  gebildet?
- Kann ein Vektor  $u \in V \otimes W$  immer als  $u = v \otimes w$  mit geeigneten  $v \in V$  und  $w \in W$  dargestellt werden?
- Was ist die Dimension von  $V \otimes W$ ?
- Angenommen die Dimension von  $V$  ist  $d$ . Welche Dimensionen haben dann das  $n$ -fache Tensorprodukt

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_n$$

und das  $n$ -fache kartesische Produkt

$$V^n = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_n$$

von  $V$ ?

### 2. Spur und Kommutator

2+2 Punkte

- $A$  und  $B$  seien zwei Operatoren auf einem Vektorraum  $V$ . Zeigen Sie:

$$\text{Tr}[A, B] = 0.$$

- Nun seien  $A$  und  $B$  selbstadjungierte Operatoren eines euklidischen bzw. unitären Vektorraums. Zeigen Sie, dass dann der Operator

$$i[A, B]$$

ebenfalls ein selbstadjungierter Operator ist.

### 3. Stufenfunktion

4 Punkte

Die *Stufenfunktion* oder *Heaviside-Funktion*  $\Theta(x)$  ist definiert durch:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass für  $x \neq 0$

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(x) = \delta(x).$$

### 4. Rechnen mit der $\delta$ -Funktion

10 Punkte

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke jeweils soweit wie möglich. Hierbei sind  $k$ ,  $a$  und  $b$  reelle, positive Konstanten.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \delta(x-a) dx, & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \delta\left(\frac{x-a}{b}\right) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-a) dx, & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta(x-a) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \delta(x^2 - a^2) dx, & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \delta(x^2 + 2ax) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-k^2 x^2} e^{-k^2 y^2} \delta(y-x) dx. & \end{aligned}$$