Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Rochus Klesse
Niklas Bonacker

Vektoranalysis – Lineare Algebra – Blatt 9

Sommersemester 2021

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/vala_21.html/*
https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_crs_3862464.html

Abgabe: Montag, den 21.06.2021, 23:59 Uhr

1. Zur Diskussion *0 Punkte*

a) Wie lauten die Fouriertransformierten der Funktionen $\delta(x-x_0)$, e^{ik_0x}, e^{-ik_0x}, $\sin(k_0x)$ und $\cos(k_0x)$?

b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Fouriertransformierten einer Funktion $f(x)$ und den Fouriertransformierten von $f(x-x_0)$ und $f'(x)$?

c) Für eine Funktion f sei eine weitere Funktion g durch $g(x) := f(\lambda x)$ definiert, wobei λ eine reelle, positive Konstante. Zeigen Sie:

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\tfrac{1}{\lambda}k)\,.$$

2. Fouriertransformationen *8+2 Punkte*

a) Berechnen Sie für $\lambda > 0$ die Fouriertransformierten der Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } |x| \leq \lambda, \\ 0 & \text{für } |x| > \lambda; \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| \leq \lambda, \\ 0 & \text{für } |x| > \lambda; \end{cases}$$

$$f_3(x) = e^{-\lambda|x|}; \qquad f_4(x) = \delta(x-x_0); \qquad f_5(x) = \frac{\partial\delta}{\partial x}(x).$$

b) Skizzieren Sie Real- und Imaginärteil der Funktionen $\hat{f}_1$ und $\hat{f}_2$. Welchen Zusammenhang finden Sie zwischen der (Anti-) Symmetrie einer reellen Funktion f und dem Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierten $\hat{f}$?

3. Fouriertransformation der Gaußschen Glockenkurve *5+5 Punkte*

a) Zeigen Sie die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Berechnen Sie dazu das Produkt $\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-x^2}e^{-y^2}$ in Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Gaußschen Glockenkurve

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Skizzieren Sie die Gaußsche Glockenkurve und deren Fouriertransformierte.

4. Wärmeleitung in einer Dimension *4+6 Punkte*

Die Temperatur $T(x,t)$ in einem homogenen eindimensionalen Wärmeleiter genügt der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

(a ist die materialspezifische Temperaturleitfähigkeit.) Bestimmen Sie $T(x,t)$ für $t > 0$ mittels des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens für

$$\text{(i)} \quad T(x,0) = \vartheta \cos(k_0 x), \qquad \text{(ii)} \quad T(x,0) = \vartheta \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}.$$

Hierbei sind ϑ, k_0 und σ_0 positive Konstanten. Skizzieren Sie für (ii) die Temperatur $T(x,t)$ zu Zeiten $t_0 = 0$ und $t_1 = 3\sigma_0^2/2a$.

5. Eigenschaften der Faltung *10 Punkte*

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist in der Vorlesung die Faltungsfunktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert worden durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} dy f(y) g(x-y).$$

Beweise die folgenden Eigenschaften der Faltung:

- $f * g = g * f$
- $(f * g)' = f' * g = f * g'$.
- Für die δ-Funktion gilt $f * \delta = f$.
- Für die Stufenfunktion

$$\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

  gilt $(f * \Theta)(x) = F(x) + \text{const.}$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.
- $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.