Vektoranalysis und Lineare Algebra

Teil I: Lineare Algebra

- Grundbegriffe der linearen Algebra:
  Vektorraum, Untervektorraum, Summe, Spann
- Lineare Abbildungen
- Matrizen und deren Verknüpfungen
- Determinante
- Eigenvektor/raum, Eigenwert
- orthogonale und unitäre Gruppe
- Linearformen, Dualraum
- Tensorprodukt

Teil II : "Vektoranalysis"

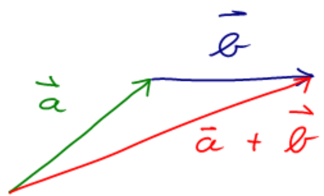
- Differenzialoperatoren (grad, div, rot, Δ , $\Box$) und deren Anwendungen in der Physik
- Partielle Differenzialgleichungen
- Fourier-Transformation
- Differenzialformen

Literatur

- Arens, Hettlich, Karpfinger, Kockelkorn, Lichtenegger, Stachel: Mathematik (Spektrum)
- Jänich: Mathematik für Physiker 1, 2 (Springer)
- Fischer, Kaul: Mathematik für Physiker 1, 2, 3 (Teubner)
- Fischer: Lineare Algebra (Springer)
- Altland, von Delft: Mathematics for Physicists (Cambridge)
- Jänich: Vektoranalysis (Springer)

Vektoren und Vektorräume (siehe Math. Meth Vrlsg. 1, 2)

kurz: Vektoren sind Objekte, die sich genau wie Translationen addieren und mit einem Skalar multiplizieren lassen:



Vektoraddition:

„+“ : $\vec{a}, \vec{b} \longmapsto \vec{a} + \vec{b}$

$\Rightarrow$ Eigenschaften:

(A1) Assoziativität: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(A2) Existenz des Nullvektors $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(A3) Existenz des inversen Vektors $-\vec{a}$ zu $\vec{a}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

(A4) Kommutativität: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Skalarmultiplikation

$$\lambda, \vec{a} \longmapsto \lambda \vec{a}$$

$\Rightarrow$ Eigenschaften:

(S1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

(S2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

(S3) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(S4) $1\vec{a} = \vec{a}$

Definition

Vektorraum := Menge V mit

(i) **Vektoraddition** $\quad V \times V \to V$ gemäß (A1 - A4)

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$

(ii) **Skalarmultiplikation** $\quad \mathbb{K} \times V \to V$ gemäß (S1 - S4)

$$(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \vec{a}$$

,

falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Vektorraum **reel** ,

falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Vektorraum **komplex** ,

Elemente eines Vektorraums heißen **Vektoren** .

Beispiele:

a) $$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{K} \right\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

mit Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

b) P_k := Menge der ganzrationalen Funktionen maximal k-ten Grades

$$\equiv \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k \}$$

mit Vektoraddition $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

und Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

c) Lösungsmenge der DGL

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit Vektoraddition $(y_1 + y_2)(x) := y_1(x) + y_2(x)$

und Skalarmultiplikation $(\lambda y)(x) := \lambda y(x)$

Linearkombination, lineare Unabhängigkeit, Vollständigkeit, Basis, Dimension, Komponentendarstellung

- eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in V$ mit Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ist per def. der Vektor

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n \in V$$

- die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$ sind linear unabhängig g.d.w. der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch die triviale Linearkombination mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ gebildet werden kann
- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$ bilden ein Erzeugendensystem (sind vollständig) g.d.w. jeder Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination der $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt werden kann: $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n$ (für geeignete $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$)

- ein linear unabhängiges und zugleich vollständiges System von Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ bildet eine Basis von V

Satz:

- jede Basis eines VRs V hat dieselbe Anzahl von Vektoren, genannt die Dimension des VRs

- $\vec{v} \in V$ besitzt bezüglich Basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ eindeutige Darstellung

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + \dots + v_n \vec{b}_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B \in V$$

$v_1, \dots, v_n$ sind die Komponenten von $\vec{v}$ bzgl. B,

$$\boxed{{}_B\vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{ ist der Komponentenvektor von } \vec{v} \text{ bzgl. } B}$$

<u>Beispiel</u>: VR der reellen ganzrat. Fkten maximal 2-ten Grades:

$$P_2 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 ; a_i \in \mathbb{R} \}$$

wir wählen Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit den Fkt.en b_1, b_2, b_3 gegeben durch

$$b_1(x) = 1,$$
$$b_2(x) = x,$$
$$b_3(x) = x^2.$$

Funktionen (= Vektoren) $f, g \in P_2$ seien gegen durch

$$f(x) = 2 + 4x - x^2, \quad g(x) = 2x + x^2$$

dann $f(x) = 2 b_1(x) + 4 b_2(x) - b_3(x)$, $g(x) = 0 b_1(x) + 2 b_2(x) + b_3(x)$

d. h. $f = 2 b_1 + 4 b_2 - b_3 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B$, $g = 0 b_1 + 2 b_2 + b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B \in P_2$

und somit auch $_B\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; $_B\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

eine andere Basis des VRs P_2 ist $G' = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$

mit Fkt. en ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 geg. durch

$$\begin{aligned} \ell_1(x) &= 1 + x \\ \ell_2(x) &= 1 - x \\ \ell_3(x) &= x^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2}\left(\ell_1(x) + \ell_2(x)\right) \\ x &= \tfrac{1}{2}\left(\ell_1(x) - \ell_2(x)\right) \\ x^2 &= \ell_3(x) \end{aligned}$$

dann gilt für f, g wie oben:

$$f(x) = 2 + 4x - x^2 = 3\ell_1(x) - \ell_2(x) - \ell_3(x)$$

$$\rightarrow \quad f = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{G'}$$

$$g(x) = 2x + x^2 = \ell_1(x) - \ell_2(x) + \ell_3(x)$$

$$\Rightarrow \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{G'}$$

beachte: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{B} \overset{!}{=} f \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{G'} \in P_2$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = {}_{B}\vec{f} \neq {}_{G'}\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$