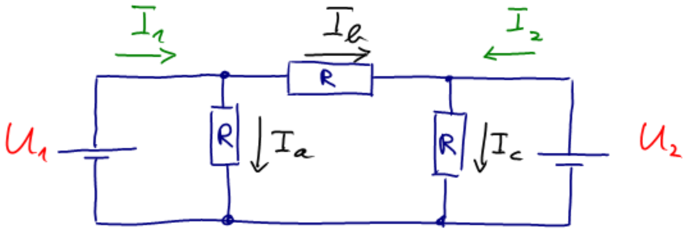
Anwendungbeispiel Matrixinversion aus der Elektrotechnik:



$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

es gilt:

$$I_1 = I_a + I_b \,, \qquad U_1 = I_a R \quad ; \quad U_1 - U_2 = I_b R$$
$$I_2 = I_c - I_b \,, \qquad U_2 = I_c R$$

$\rightsquigarrow$ $I_1 = U_1/R + (U_1 - U_2)/R$

$I_2 = U_2/R - (U_1 - U_2)/R$, d.h. $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{R}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:G} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$

d. h. $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ mit <u>Leitwertmatrix</u> $G = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Wie müssen Spannungen U_1, U_2 gewählt werden, damit vorgegebene Ströme I_1 und I_2 vorliegen?

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \frac{R}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$$

(siehe Blatt 3, Übg 5a))

d. h. $U_1 = 2/3 \, R I_1 + 1/3 \, R I_2$

$U_2 = 1/3 \, R I_1 + 2/3 \, R I_2$

Anwendungsbeispiel Matrix / Operator - Exponentialfunktion:

verallgemeinerter Exponentialansatz für mehrdimensionale DGL

eindimensionale lineare DGL (homogen): $\boxed{\dot{y} = a y}$

Lösung zum Anfangswert y_0 bei $t=0$ $\equiv$ Funktion $y : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$

derart, dass 1) $y(0) = y_0$

2) $\dot{y}(t) = a\, y(t)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$

$$\rightarrow \boxed{y(t) = e^{at}\, y_0}$$

mehrdimensionale lineare DGL (homogen):

mit Operator $\boxed{\begin{array}{c} \dot{y} = A y \\ A : V \to V \end{array}}$

Lsg. zum AW $y_0 \in V$ bei $t=0$

$\equiv$ Fkt. $y : [t_1, t_2] \to V$:

1) $y(0) = y_0$

2) $\dot{y}(t) = A\, y(t)$ für $t \in [t_1, t_2]$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y(t) = e^{At}\, y_0} \quad , \quad e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n$$

1) $\quad y(0) = e^{0}\, y_0 = y_0 \quad \checkmark$

2) $\quad \dot{y}(t) \stackrel{?}{=} A\, y(t)$:

$$\frac{d}{dt}(At)^n = \frac{d}{dt} A^n t^n = A^n \frac{d}{dt} t^n = n A^n t^{n-1}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{At} y_0\right) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Bigg(\underbrace{\frac{d}{dt}(At)^n}_{= n A^n t^{n-1}}\Bigg) y_0$$

$$= A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (At)^{n-1} y_0 = \underbrace{A \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (At)^n}_{= e^{At}} y_0}_{= y(t)}$$

d.h. $\quad \dot{y}(t) = A\, y(t) \quad \checkmark$

→ in der Quantenmechanik:

Zustand $\equiv$ normierter Vektor $\psi \in \mathcal{H}$

$\uparrow$ komplexer VR.

Zustandsentwicklung gemäß Schrödingergleichung:

$$\boxed{\dot{\psi} = \underbrace{-\frac{i}{\hbar} H}_{\widehat{=} A} \psi}$$

$\hbar = 1{,}04.. \cdot 10^{-34}$ Js

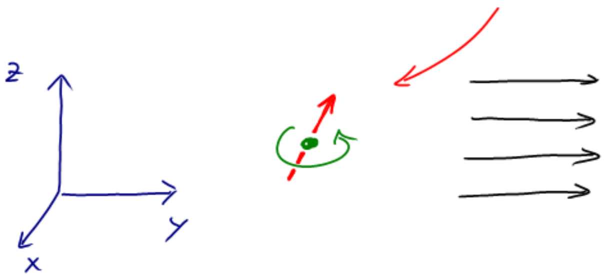
$H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$\uparrow$ Hamilton-Operator

→ Zustand zur Zeit t:

$$\boxed{\psi(t) = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H t}}_{\text{Zeitentwicklungsoperator}} \underbrace{\psi_0}_{\text{Anfangszustand}}}$$

Konkret: Dynamik des Elektron-Spins im konst. Magnetfeld:



$$\vec{B} = B_0 \, \hat{y}$$

Zustand Spin-up $\hat{=}$ $\varphi_\uparrow$

Zustand spin-down $\hat{=}$ $\varphi_\downarrow$

$\longrightarrow$ Spin-Zustandsvektorraum

$$\mathcal{H} = \mathrm{Span}\{\varphi_\uparrow, \varphi_\downarrow\}$$

Spin-Hamilton-Operator: $H = \mu_0 B \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (Abbildungsmatrix bzgl. $\mathcal{B} = (\varphi_\uparrow, \varphi_\downarrow)$)

$\longrightarrow$ Zeitentwicklungsoperator $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{\omega t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \;?$

mit Übungsaufgabe 4 Blatt 3:

Zeitentwicklungsoperator $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{\omega t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

d.h. $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(t) \\ \psi_\downarrow(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^0 \\ \psi_\downarrow^0 \end{pmatrix}$

„<u>Spin-Präzession</u>"

$\rightarrow$ ausführlicher in QM I