Determinante einer $n \times n$ Matrix

$$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \right)$$

a)

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}}$$

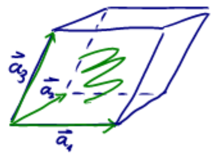
(Leibniz-Formel)

Signum der Permutation σ

Summe über alle n-stelligen Permutationen

b)

$\boxed{\det A = (\text{orientiertes})\ \underline{n\text{-dimensionales Volumen}} \text{ des durch } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \text{ aufgespannten } n\text{-Spats}}$



$n = 3$

Ausgangspunkt: b)

Determinante $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) :=$

orientiertes Volumen $\Omega_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$
des durch $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ aufgespannten n-Spats

$\longrightarrow$
- Eigenschaften und Anwendungen der Determinante
- Leibniz-Formel

Was ist das orientierte Volumen $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$?

bereits klar für $n = 1, 2, 3$ $\longrightarrow$

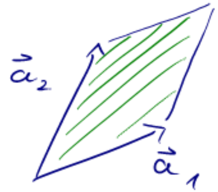
$\underline{n=1}$: 1-Spat $\hat{=}$ $a \in \mathbb{R}$

mit Länge $\equiv$ 1-Volumen

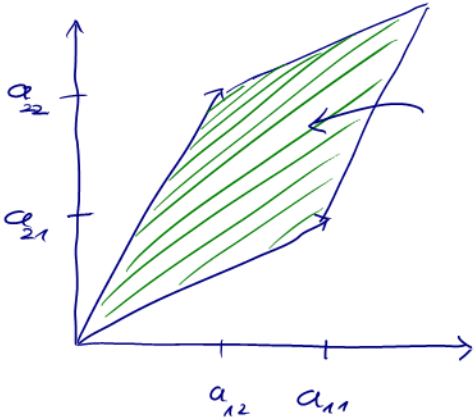
$$\boxed{\Omega_1(a) = \underline{a}}$$ (*)

$\underline{n=2}$: 2-Spat $\hat{=}$ Parallelogramm

mit Flächeninhalt $= \underline{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$



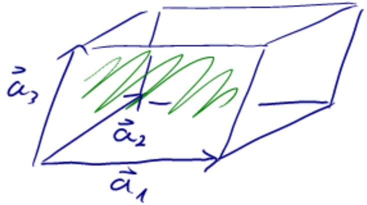
falls $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}_B$ also



$$\boxed{\Omega_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \underline{\underline{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}}}$$ (*)

(*): etwaiges negatives Vorzeichen erweist sich später als äußerst zweckmäßig!

$\underline{n=3}$: 3-Spat = "Spat"



mit Volumeninhalt $\equiv$

$$\boxed{\Omega_3(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3) = \underline{\langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 , \vec{a}_3 \rangle}} \qquad (*)$$

falls $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ also

$$\langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 , \vec{a}_3 \rangle = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega_3(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3) = {} & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{31} a_{12} a_{23} + a_{21} a_{31} a_{13} \\ & - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23}\end{aligned}}$$

allgemeines n: n-Spat aufgespannt durch n Vektoren

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$; V euklidischer VR der Dim. n

bzgl. ONB $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ gelte $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

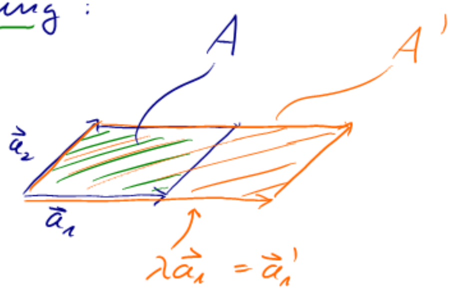
$$\boxed{\Omega_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = ?}$$

Strategie: bestimme Ω_n durch allgemeine Eigenschaften

und folgere daraus explizite Formel für $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$!

Charakteristische Eigenschaften sind z.B.:

1) Skalierung:



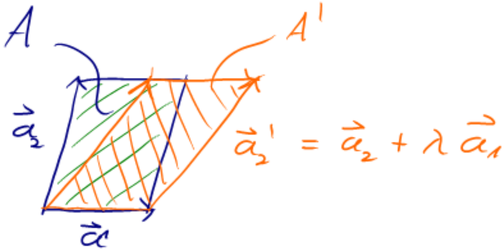
$$A' \overset{!}{=} \lambda A \,, \quad \text{d.h.}$$

$$\Omega_2(\lambda\vec{a}_1, \vec{a}_2) \overset{!}{=} \lambda\,\Omega_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

für allg n erwarten wir:

$$\Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \underline{\underline{\lambda}}\,\vec{a}_i, \ldots \vec{a}_n) \overset{!}{=} \underline{\underline{\lambda}}\,\Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \underline{\underline{\vec{a}_i}}, \ldots, \vec{a}_n)$$

2) Invarianz unter Scherung:



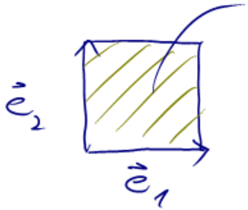
$$A' \overset{!}{=} A \,, \quad \text{d.h.}$$

$$\Omega_2(\vec{a}_1, \underline{\underline{\vec{a}_2 + \lambda\vec{a}_1}}) \overset{!}{=} \Omega_2(\vec{a}_1, \underline{\underline{\vec{a}_2}})$$

allg.: $$\Omega_n(\ldots, \underline{\underline{\vec{a}_i}}, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) \overset{!}{=} \Omega_n(\ldots, \underline{\underline{\vec{a}_i + \lambda\vec{a}_j}}, \ldots, \vec{a}_j, \ldots)$$

3) Normierung:

$A = 1$, d.h. $\Omega_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$



allg.: $\Omega_n(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \overset{!}{=} 1$

tatsächlich ist das orientierte n-dim. Volumen Ω_n durch die Eigenschaften

1) Skalierung
2) Scherinvarianz
3) Normierung

eindeutig bestimmt!

Definition / Satz: Das <u>n-dimensionale orientierte Volumen</u>

$$\Omega_n : V^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (V \text{ } n\text{-dim eukl. VR})$$
$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \longmapsto \Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

ist eindeutig bestimmt durch Eigenschaften

(V1) $\Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \underline{\underline{\lambda}}\vec{a}_i, \ldots \vec{a}_n) = \underline{\underline{\lambda}}\, \Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n)$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ (Skalierung)

(V2) $\Omega_n(\ldots, \underline{\underline{\vec{a}_i}}, \ldots, \underline{\underline{\vec{a}_j + \lambda \vec{a}_i}}, \ldots) = \Omega_n(\ldots, \underline{\underline{\vec{a}_i}}, \ldots, \underline{\underline{\vec{a}_j}}, \ldots)$

(Scherinvarianz)

(V3)

$$\Omega_n(\underbrace{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n}_{\underline{\text{ONB}}}) = 1 \qquad (\text{Normierung})$$

aus (V1 – V3) folgt weiterhin:

(V4) $$\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots) = \Omega_n(\ldots, \vec{a}_i + \vec{u}, \ldots)$$

$$\vec{u} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} u_l \vec{a}_l$$

(V5) $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$;

(V6) $$\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \ldots) = \Omega_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots) + \Omega_n(\ldots, \vec{b}_i, \ldots)$$

(mit (V1): Linearität)

(V7) $$\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) = - \Omega_n(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots)$$

(Antisymmetrie)

Wir folgern zuerst (V4) – (V7) aus (V1) – (V3); danach zeigen wir Eindeutigkeit von Ω_n.

(V4) folgt mittels $(n-1)$-maligem Anwenden von (V2),

(V5): <u>anschaulich:</u> n linear <u>ab</u>hängige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ spannen <u>keinen</u> n-Spat, sondern eine Hyperfläche mit Dimension $\leq n-1$ auf $\rightarrow$ Volumen verschwindet!

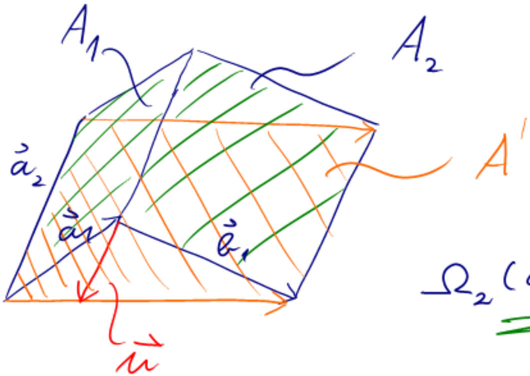
<u>formal:</u> sind $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear <u>ab</u>hängig, so

$$\vec{a}_{i_0} + \underbrace{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_0}}^{n} \lambda_l a_l}_{} = \vec{o} \quad \text{für ein } i_0 \text{ und geeignete } \lambda_l;$$

mit $\vec{u} :=$ also nach (V4):

$$\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i_0}, \dots \vec{a}_n) = \Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_{i_0} + \vec{u}}_{= \vec{o}}, \dots) = \Omega_n(\dots, \vec{o}, \dots) \overset{(V1)}{=} 0$$

(V6): <u>anschaulich:</u>



<u>Scherinvarianz</u>

$$A_1 + A_2 = A'$$

$$\underline{\Omega_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2)} + \underline{\Omega_2(\vec{b}_1, \vec{a}_2)} = \underline{\Omega_2(\vec{a}_1 + \vec{b}_1, \vec{a}_2)}$$

Argument lässt sich ohne Probleme zu einem allgemeinen Beweis vervollständigen.

Ausgangspunkt: Konstruktion eines Vektors $\vec{u}$ derart, dass

1) $\vec{a}_1 + \vec{u} \parallel \vec{a}_1 + \vec{b}_1$

2) $\vec{b}_1 - \vec{u} \parallel \vec{a}_1 + \vec{b}_1$

(siehe Vlsg. 6, Math. Meth. 2017)

(V7) <u>Antisymmetrie</u>:

$$\Omega_n(\ldots, \underline{\vec{a}_i}, \ldots, \underline{\vec{a}_j}, \ldots) \overset{(V2)}{=} \Omega_n(\ldots, \vec{a}_i + \underline{\vec{a}_j}, \ldots, \vec{a}_j \ldots)$$

$$\overset{(V1)}{=} -\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots, -\vec{a}_j, \ldots) \overset{(V2)}{=} -\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots, \underline{\vec{a}_i}, \ldots)$$

$$\overset{(V_2)}{=} -\Omega_n(\ldots, \underline{\vec{a}_j}, \ldots, \underline{\vec{a}_i} \ldots) .$$

damit sind Eigenschaften V4) – (V7) gezeigt;

mittels Eigenschaften (V1), (V3), (V6) und (V7) konstruieren wir nun explizite Formel für $\Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ und zeigen damit Eindeutigkeit.

Bzgl. ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ gelte

$$\vec{a}_\ell = \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ a_{2\ell} \\ \vdots \\ a_{n\ell} \end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^{n} a_{i\ell}\, \vec{e}_i \quad , \qquad \ell = 1, \ldots, n$$

$$\rightarrow \Omega_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = \Omega_n\Big(\underbrace{\sum_{i_1} a_{i_1 1}\, \vec{e}_{i_1}}_{\vec{a}_1}, \underbrace{\sum_{i_2} a_{i_2 2}\, \vec{e}_{i_2}}_{\vec{a}_2}, \ldots, \underbrace{\sum_{i_n} a_{i_n n}\, \vec{e}_{i_n}}_{\vec{a}_n}\Big)$$

$$\overset{(V1),(V6)}{=} \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} a_{i_1 1}\, a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}\, \underline{\Omega_n(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n})}$$

eindeutig bestimmt durch (V3) und (V7) !

$\longrightarrow$

Def.: n-dimensionales Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} := \Omega_n(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) = \begin{cases} \underline{\underline{+1}} : & (i_1 i_2 \dots i_n) \text{ geht durch } \underline{\text{gerade}} \text{ Anzahl von Vertauschungen aus } (1\,2\,3 \dots n) \text{ hervor} \\ \underline{\underline{-1}} : & \text{— " — " — } \underline{\text{ungerade}} \text{ — " — " —} \\ \underline{\underline{0}} : & \underline{\text{sonst}} \text{ (d.h. mindestens zwei Indices stimmen überein)} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$
$$\boxed{\Omega_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \, a_{i_1 1} \, a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}}$$

$\rightsquigarrow$ Berechnung von $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ mittels Komponenten der Vek. $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$:

$\longrightarrow$

$\underline{n=1}$: $\varepsilon_1 = +1 \rightarrow \Omega_1(a) = \varepsilon_1 a = a$ ✓

$\underline{n=2}$: $\varepsilon_{12} = +1 \, , \quad \varepsilon_{21} = -1 \, , \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$

$$\rightarrow \Omega_2\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) = \varepsilon_{12}\, a_{11}\, a_{22} + \varepsilon_{21}\, a_{21}\, a_{12}$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} \quad ✓$$

$\underline{n=3}$: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$

$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \; ; \quad \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \cdots = 0$

$$\rightarrow \Omega_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad ✓$$

$\underline{n=4}$: $\varepsilon_{1234} = +1 = \varepsilon_{2143} = \varepsilon_{4321} = \cdots$

$\varepsilon_{2134} = -1 = \varepsilon_{1243} = \varepsilon_{4312} = \cdots$

$$\rightarrow \Omega_4(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_4) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} + a_{21}\, a_{12}\, a_{43}\, a_{34} + \cdots - a_{21}\, a_{12}\, a_{33}\, a_{44} - \cdots \quad ✓$$

mittels des nun hinreichend genau charakterisierten orientierten n-Volumen $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ definieren wir:

<u>Definition</u>: <u>Determinante einer Matrix</u> $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in M(n,n)$

$$\boxed{\det A := \Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{i_1 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n}}$$

→ <u>Eigenschaften der Determinante</u>

(D1) <u>Linearität</u>

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \underline{\lambda \vec{a}_i + \vec{b}_i}, \dots \vec{a}_n) = \underline{\lambda} \det(\vec{a}_1, \dots, \underline{\vec{a}_i}, \dots, \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1, \dots, \underline{\vec{b}_i}, \dots, \vec{a}_n)$$

(D2) <u>Scherinvarianz</u>

$$\det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \underline{\vec{a}_j} \dots) = \det(\dots, \vec{a}_i, \dots, \underline{\vec{a}_j + \lambda \vec{a}_i}, \dots)$$

(D3) <u>Normierung</u>: $\det(\mathbb{1}) = 1$

(D4) <u>Antisymmetrie</u>:

$$\det(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) = - \det(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots)$$

(D5) $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig $\Longleftrightarrow$ $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$

(d.h.: $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$)

(D6) A invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

(D7) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

(D8) <u>Multiplikationssatz</u>: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

insbes.: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

(D1) – (D4) folgen direkt aus Eigenschaften des orient. n-Volumen Ω_n

(D5): $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig $\Longleftrightarrow$ $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$

- „$\Rightarrow$": klar nach (V5);
- „$\Leftarrow$": zu zeigen: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear unabhängig $\Rightarrow \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \neq 0$

nach Voraussetzung ex. en e_{ij} derart, dass $\vec{e}_j = \sum_i e_{ij} \vec{a}_i$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{0 \neq 1}} = \det(\mathbb{1}) = \Omega_n(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \Omega_n\Big(\sum_{i_1} e_{i_1 1} \vec{a}_{i_1}, \dots \sum_{i_n} e_{i_n n} \vec{a}_{i_n}\Big)$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_n} e_{i_1 1} \cdots e_{i_n n} \underbrace{\Omega_n(\vec{a}_{i_1}, \dots, \vec{a}_{i_n})}_{\parallel}$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_n} e_{i_1 1} \cdots e_{i_n n} \overbrace{\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \underbrace{\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)}_{\substack{\parallel \\ \underline{\underline{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)}}}}} \longrightarrow \underline{\underline{\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \neq 0}}$$

(D6) identifiziere $A \in M(n,n,\mathbb{K})$ mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$:

A invertierbar $\iff$ $\dim \ker A = 0$ $\iff$ $\dim \operatorname{Im} A = n$

$\iff$ $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$ $\iff$ Bilder der Basisvekt. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ unter A

linear unabhängig $\iff$ Spaltenvekt. $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ der Matrix A

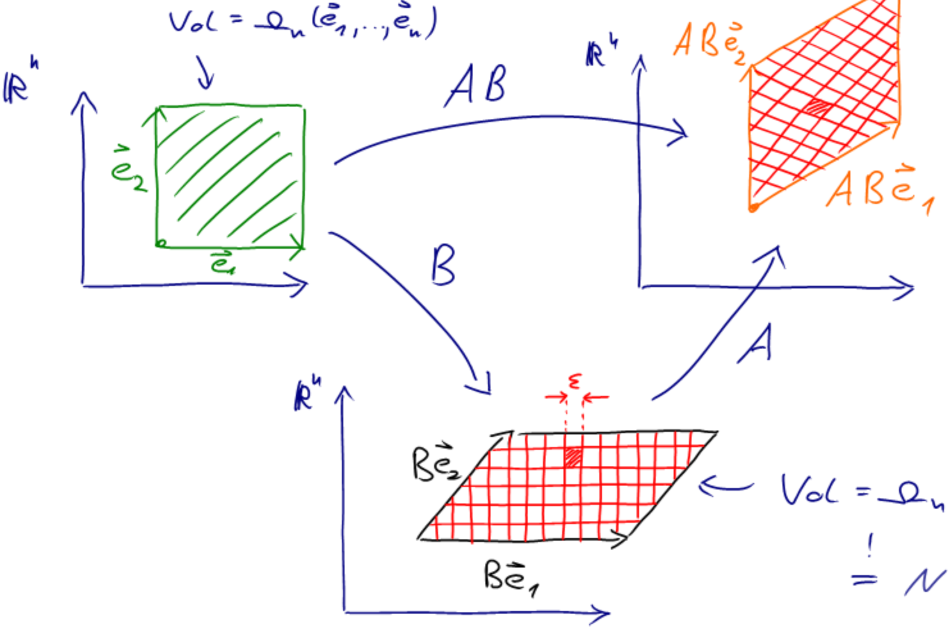
linear unabhängig $\underset{(D5)}{\iff}$ $\det A \neq 0$.

(D7) $\det(\lambda A) = \det(\lambda \vec{a}_1, \ldots, \lambda \vec{a}_n) \overset{(D1)^n}{=} \lambda^n \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda^n \det A$

(D8) $\qquad \det(AB) = (\det A)(\det B)$:

<u>geometrisch</u> :

$$\mathrm{Vol} = \Omega_n(AB\vec{e}_1, \dots, AB\vec{e}_n) \qquad (2)$$
$$\overset{!}{=} N\varepsilon^n\,\Omega_n(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n)$$



$$\mathrm{Vol} = \Omega_n(B\vec{e}_1, \dots, B\vec{e}_n) \qquad (1)$$
$$\overset{!}{=} N\varepsilon^n$$

d. h. $\underline{\det(AB)} = \Omega_n(AB\vec{e}_1, \dots, AB\vec{e}_n) \overset{(2)}{=} N\varepsilon^n\,\Omega_n(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n)$

$$\overset{(1)}{=} \Omega_n(B\vec{e}_1, \dots, B\vec{e}_n)\,\Omega_n(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n) = \underline{(\det B)(\det A)}\,.$$