Permutationen

n-stellige Permutation $\equiv$ bijektive Abb. $\sigma : \{1, 2, \dots n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$

$$i \longmapsto \sigma_i$$

Notation: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

Beispiele: $n = 3$: $\sigma = (2, 3, 1)$:
$$1 \longmapsto 2$$
$$2 \longmapsto 3$$
$$3 \longmapsto 1$$

$\tau = (3, 2, 1)$:
$$1 \longmapsto 3$$
$$2 \longmapsto 2$$
$$3 \longmapsto 1$$

$\rightarrow$ $\sigma \circ \tau = (1, 3, 2)$, $\tau \circ \sigma = (2, 1, 3)$

Menge aller n-stelligen Permutationen: S_n

Anzahl aller n-stelligen Permutationen:

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$ ("n Fakultät")

S_n mit Verkettung „$\circ$" bildet die symmetrische Gruppe.

Transposition / Vertauschung:

$\tau_{lm} \in S_n$ vertauscht genau l mit m, d.h.

$$\tau_{lm}(i) := \begin{cases} l & : \; i = m \\ m & : \; i = l \\ i & : \; \text{sonst} \end{cases}$$

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann in Transpositionen zerlegt werden:

$$\sigma = \tau_{l_k m_k} \circ \tau_{l_{k-1} m_{k-1}} \circ \ldots \circ \tau_{l_1 m_1} ,$$

Zerlegung nicht eindeutig, aber Anzahl K der Transpositionen der Zerlegungen von σ entweder immer gerade oder immer ungerade.

→ Das Vorzeichen (Signum) einer Permutation σ ist definiert durch:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \begin{cases} +1 & : \text{Anzahl } k \text{ der Transpos. gerade} \\ -1 & : \text{Anzahl } k \text{ der Transpos. ungerade} \end{cases}$$

Beispiele: $\mathrm{sgn}(1,3,2) = -1$, $\mathrm{sgn}(3,1,2) = +1$

für n-dim. Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} := \Omega_n(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n})$ erhalten wir aufgrund Antisymmetrie von Ω_n:

$$\boxed{\varepsilon_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n} = \mathrm{sgn}(\sigma)}$$

→

$$\boxed{\det A} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \, a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \overbrace{a_{1 \sigma_1^{-1}} a_{2 \sigma_2^{-1}} \cdots a_{n \sigma_n^{-1}}}$$

$$\boxed{= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \, a_{1 \sigma_1} a_{2 \sigma_2} \cdots a_{n \sigma_n}}$$

$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$

Leibniz-Formel

$\downarrow$

ebenso gezeigt:

$$\boxed{\det A = \det A^T}$$

$$\boxed{\det A = \det A^T}$$

$$\Downarrow$$

Spalten-Linearität $\longrightarrow$ Zeilen-Linearität

Spalten-Antisymmetrie $\longrightarrow$ Zeilen-Antisymmetrie

Spalten-Scherinvarianz $\longrightarrow$ Zeilen-Scherinvarianz

Berechnung der Determinante / des orient. Volumens

$n=2$:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \Omega_2\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

$n=3$:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \equiv \Omega_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k = \ldots$$

Merkregel von Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \quad \hat{=}$$

$-$ $+$

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \overset{!}{\doteq}$$

$$+ a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$$
$$- a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

$\underline{\underline{n \gg 1}}$: direkte Berechnung mittels Leibniz-Formel wegen $n! \approx (n/e)^n$ Summanden ineffizient;

besser: <u>Gauß-Verfahren</u> (s.u.)

zuerst sehr einfacher Spezialfall:

<u>A Diagonalmatrix</u>, d.h. $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$$\equiv (d_1 \vec{e}_1, d_2 \vec{e}_2, \ldots, d_n \vec{e}_n)$$

$$\rightarrow \det A = \Omega_n(d_1 \vec{e}_1, \ldots, d_n \vec{e}_n) = d_1 d_2 \cdots d_n \underbrace{\Omega_n(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)}_{=1}$$

$$\boxed{\det A = d_1 d_2 \cdots d_n}$$

etwas komplizierter:

<u>A obere Dreiecksmatrix</u>, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & d_2 & b_{23} & & b_{2n} \\ 0 & 0 & d_3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_n \end{pmatrix}$$

$$\to \boxed{\det A} = d_1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & d_2 & b_{23} & & b_{2n} \\ & & d_3 & & \vdots \\ & & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & & 0 \\ & & d_3 & b_{34} & \cdots \\ & & & \ddots & d_n \end{pmatrix}$$

Linearität, Scherinvarianz

$$= \cdots = \boxed{d_1 d_2 \cdots d_n}$$

allgemeine Matrix $A = (a_{ij})$:

- Forme A mittels "Scherungen" und ggf. Spalten- bzw. Zeilenvertauschungen in obere Dreiecksmatrix $\tilde{A}$ um

$$\rightarrow \det A = \underbrace{\pm}_{\text{bestimmt durch Zahl der Vertauschungen.}} \det \tilde{A} = \pm \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} \cdots \tilde{a}_{nn} . \qquad (\text{Gauß})$$

explizit:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a_{n-1,1} & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a'_{n-1,1} & a'_{n-1,2} & & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \longrightarrow$$

$$- \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \cdot \vec{a}_n$$

$$- \frac{a_{n1}}{a_{nn}} \vec{a}_n$$

$$- \frac{a'_{n-1,2}}{a_{n-1,n-1}} \vec{a}'_{n-1}$$

$$- \frac{a'_{n-1,1}}{a'_{n-1,n-1}} \vec{a}'_{n-1}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a''_{11} & \cdots & a'_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a''_{n-2,1} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & a'_{n-1,n-1} & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = \cdots =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & & \vdots \\ & \tilde{a}_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\underline{\text{Anzahl Rechenschritte}} \leq \frac{n^3}{3} \ll n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$$