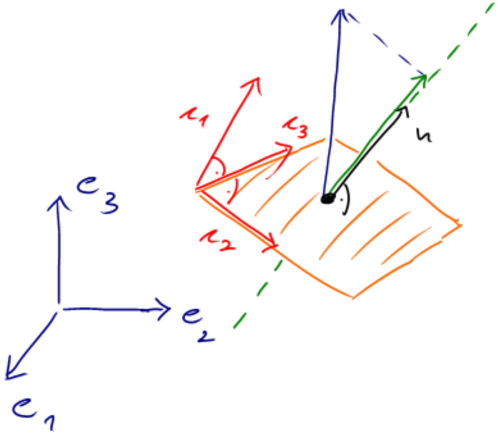
Basiswechsel und Ähnlichkeitstransformation

Motivation: Vereinfachung der Abbildungsmatrix eines Operators durch geeignete Basiswahl!

Beispiel: Projektion $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto \langle u, v \rangle u$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$|u| = 1$



$$\longrightarrow \quad {}_B P_B = \begin{pmatrix} u_1 u_1 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_2 u_1 & u_2 u_2 & u_2 u_3 \\ u_3 u_1 & u_3 u_2 & u_3 u_3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad {}_B f(P)_B = \dots$$

$B = (e_1, e_2, e_3)$

$C = (c_1, c_2, c_3)$, $c_1 = u$

$${}_C P_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad !$$

$$\longrightarrow \quad {}_C f(P)_C \overset{!}{=} \begin{pmatrix} f(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problem 1: Transformation der Abbildungsmatrix

$${}_{B}A_{B} \longrightarrow {}_{C}A_{C}$$

eines Operators $\hat{A}$ unter Basiswechsel $B \to C$.

$\Rightarrow$ Ähnlichkeitstransformation

Problem 2: Bestimmung einer Basis B derart, dass ${}_{B}A_{B}$ möglichst einfach, idealerweise diagonal:

$${}_{B}A_{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \, \lambda_n \end{pmatrix}$$

(nicht immer möglich!)

$\Rightarrow$ Eigenwert, Eigenvektor, ...

Matrixdiagonalisierung (nächste Vlg.)

Transformation von Vektorkomponenten und Abbildungsmatrix unter Basiswechsel

Basis $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$\Rightarrow \quad V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, b_i \quad \longrightarrow \quad \text{Komponenten bzgl. } B \quad {}_B v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

$$\updownarrow \quad ?$$

Basis $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$\Rightarrow \quad V \ni v = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i\, c_i \quad \longrightarrow \quad \text{Komponenten bzgl. } C \quad {}_C v = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Darstellung der Basisvektoren $c_1, \dots, c_n$ durch Basis B definiert **Basiswechselmatrix** $S = (S_{ij}) \in GL(n, \mathbb{K})$ gemäß

$$\boxed{c_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}\, b_i} \qquad (1)$$

damit folgt:

$$\sum_i v_i b_i \overset{!}{=} v \overset{!}{=} \sum_j \tilde{v}_j c_j \overset{(1)}{=} \sum_j \tilde{v}_j \sum_i S_{ij} b_i = \sum_i \Big(\sum_j S_{ij} \tilde{v}_j \Big) b_i$$

${}_B v$ ${}_C v$

(2)

$$\rightsquigarrow v_i = \sum_i S_{ij} \tilde{v}_j \; ; \text{ d.h. } \quad \boxed{{}_B v = S\, {}_C v \quad \text{und} \quad {}_C v = S^{-1}\, {}_B v}$$

→ Transformation der Abbildungsmatrix:

$$\underset{=}{{}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}}\ \underset{=}{{}_{\mathcal{C}}v} = {}_{\mathcal{C}}(Av) \overset{(2)}{=} S^{-1}\,{}_{B}(Av) = S^{-1}\,{}_{B}A_{B}\,{}_{B}v = S^{-1}\,{}_{B}A_{B}\,\overbrace{S\,S^{-1}}^{=1}\underbrace{{}_{B}v}_{={}_{C}v} = \underset{=}{S^{-1}\,{}_{B}A_{B}\,S}\ \underset{=}{{}_{C}v}$$

d.h.

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}} = S^{-1}\,{}_{B}A_{B}\,S}$$

<u>Beispiel</u>: $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sei durch ${}_{B}A_{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl. $B = (e_1, e_2)$ gegeben. Wie lautet ${}_{C}A_{C}$ bzgl. $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ mit $c_1 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$

$c_2 = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$?

$$c_1 \overset{!}{=} S_{11}\, e_1 + S_{21}\, e_2$$

$$c_2 \overset{!}{=} S_{12}\, e_1 + S_{22}\, e_2$$

$$\rightarrow \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow$$

offenbar $S = S^{-1}$ und somit ${}_{C}A_{C} = S^{-1}\,{}_{B}A_{B}\,S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$!

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ stellen <u>denselben</u> Op. A bzgl. <u>untersch.</u> Basen B und $\mathcal{C}$ dar!

Transf. ${}_B A_B \rightarrow {}_C A_C = S^{-1}\, {}_B A_B\, S$ ist Beispiel einer Ähnlichkeits-transformation:

Definition:

Zwei Matrizen (Operatoren) A und B sind einander ähnlich (in Formeln: $A \sim B$)

$:\Longleftrightarrow$ es ex. $S \in GL(n, K)$ (bzw. $S \in GL(V)$) derart, dass

$$\boxed{A = S^{-1} B S}$$

- ähnliche Matrizen A und B haben dieselbe Determinante:

$$\det A = \det(S^{-1} B S) = \underbrace{\det(S^{-1})}_{= \frac{1}{\det S}} (\det B)(\det S) = \det B$$

Definition:

Determinante eines Operators $A: V \to V$:

$$\det A := \det{}_B A_B$$

wobei B beliebige Basis von V.

mit Eigenschaften entsprechend der Matrix-Determinante; für $A, B \in \mathcal{L}(V, V)$:

- A invertierbar $\iff$ $\det A \neq 0$
- $\dim \operatorname{Ker} A > 0$ $\iff$ $\det A = 0$
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$