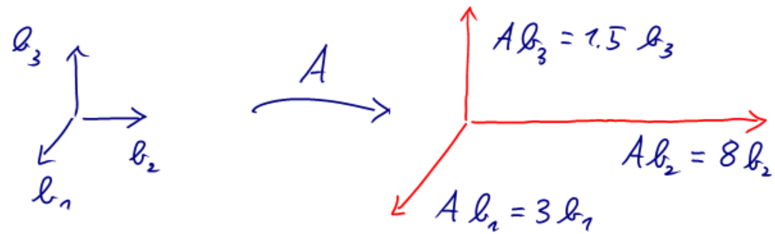
Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum, charakteristisches Polynom

Motivation: besonders einfach wird die Abbildungsmatrix falls der Operator die Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$ jeweils nur dehnt oder staucht; d.h.

$$A b_1 = \lambda_1 b_1 \;, \quad A b_2 = \lambda_2 \;, \quad \dots, \quad A b_n = \lambda_n b_n \quad ; \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

z.B.:



$$\underline{\underline{A b_i \overset{!}{=} \lambda_i b_i}} \quad \longrightarrow \quad {}_B A_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Definition:

(i) λ ist Eigenwert des Operators A zu Eigenvektor v

$$:\Longleftrightarrow \quad v \neq \vec{0} \quad \text{und} \quad \boxed{Av = \lambda v}$$

(ii) Der Eigenraum E_λ eines Eigenwerts λ von A ist

$$\boxed{E_\lambda := \{ v \in V \mid Av = \lambda v \}}$$

(iii) Eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ ist Eigenbasis von A g.d.w. jeder Basisvektor ein Eigenvektor von A ist, d.h.

$$A b_i = \lambda_i b_i \quad \longrightarrow \quad {}_B A_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

„A ist diagonal bzgl. Basis B"

(iv) A ist diagonalisierbar $:\Longleftrightarrow$ A besitzt Eigenbasis

Bemerkungen:

- Eigenraum E_λ ist Untervektorraum von V:

$v, w \in E_\lambda \leadsto$ $A(v+w) = Av + Aw = \lambda v + \lambda w$
$= \lambda(v+w)$,
$A(\mu v) = \mu A v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v)$

d.h. $v+w, \mu v \in E_\lambda$.

- $A|E_\lambda = \lambda \mathbb{1}_{E_\lambda}: \quad E_\lambda \to E_\lambda$
$\qquad v \mapsto \lambda v$

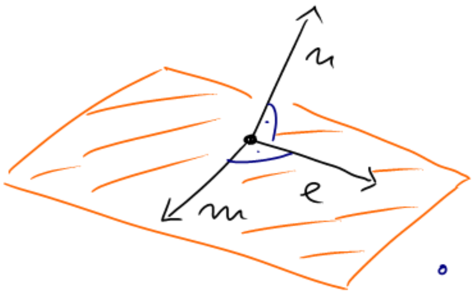
- sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A, dann $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}\}$

$\ulcorner$ $v \in E_\lambda \cap E_\mu \leadsto Av = \lambda v$ und $Av = \mu v$
$\leadsto \vec{0} = Av - Av = \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} v \leadsto v = \vec{0}$ $\lrcorner$

Beispiele:

1) $n, m, \ell \in \mathbb{R}^3$ seien orthonormal, $P_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto \langle n, v \rangle n$

Projektionen auf n,



- 1 ist Eigenwert von P_n zum Eigenvektor n.

  $\ulcorner$ denn $P_n n = 1 n$ $\perp$

- 0 ist Eigenwert von P_n zum Eigenvektor m und Eigenvektor ℓ

  $\ulcorner$ denn $P_n m = 0 m$

  $P_n \ell = 0 \ell$ $\perp$

- Eigenräume von P_n: $E_1 = \mathrm{Span}\{n\}$, $E_0 = \mathrm{Span}\{m, \ell\}$

- $B = (n, m, \ell)$ ist Eigenbasis von P_n, ${}_B(P_n)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $n, m, \ell \in \mathbb{R}^3$, $P_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie unter 1),

$P_m, P_\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien Projektionen auf m bzw. ℓ;

sei $$A := \alpha P_n + \beta P_m + \gamma P_\ell \quad , \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

- α ist EW von A zum EV n (denn $An = \alpha n$)
  β " " " " " m (" $Am = \beta m$)
  γ " " " " " ℓ (" $A\ell = \gamma \ell$)

- A besitzt Eigenräume $E_\alpha = \operatorname{Span}\{n\}$
  $E_\beta = \operatorname{span}\{m\}$
  $E_\gamma = \operatorname{Span}\{\ell\}$

- $B = (n, m, \ell)$ ist (orthonormale) Eigenbasis von A:

$$ {}_B A_B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} .$$

Wie bestimmen wir Eigenwerte und Eigenvektoren eines allg. Operators?

<u>Lemma:</u>

(i) λ Eigenwert von A $\iff$ $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

(ii) λ Eigenwert von A $\Rightarrow$ $E_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$

Γ zu (i): „$\Leftarrow$“: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \rightarrow \dim \ker(A - \lambda \mathbb{1}) > 0 \rightsquigarrow$ es ex.

$v \neq \vec{0}$ derart, dass $\vec{0} = (A - \lambda \mathbb{1}) v = Av - \lambda v$, d.h. $Av = \lambda v$;

also λ EW von A; „$\Rightarrow$“ ✓

zu (ii):

$$E_\lambda = \{ v \in V \mid \underbrace{Av = \lambda v} \} = \{ v \in V \mid \underbrace{(A - \lambda \mathbb{1}) v = 0} \} = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\lrcorner$

Satz

Die **Eigenwerte** eines Operators A sind genau die **Nullstellen** des **charakteristischen Polynoms**

$$P(x) := \det(A - x\mathbb{1}) \qquad (*)$$

Eigenwerte $\lambda_i \longrightarrow E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})$

$(*)$: d.h. $P(x) = \det({}_B A_B - x\mathbb{1})$, B beliebige Basis

Beispiel: Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators A mit Abbildungsmatrix ${}_B A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$:

$\rightarrow$ charakterist. Polynom $p(x) = \det\left({}_B A_B - x \mathbb{1}_2\right) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 4-x \end{pmatrix}$

$$= (2-x)(4-x) - 1 = x^2 - 6x + 7$$

$$= (x-3)^2 - 2$$

$\rightarrow$ Nullstellen $\equiv$ Eigenwerte $\lambda_1 = \underline{\underline{3 - \sqrt{2}}}$ und $\lambda_2 = \underline{\underline{3 + \sqrt{2}}}$

$\rightarrow$ $E_{\lambda_1} = \ker\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda_2} = \ker\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

d. h. $\underline{\underline{3-\sqrt{2}}}$ ist EW zum EV $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}_B}}$; $\underline{\underline{3+\sqrt{2}}}$ ist EW zum EV $\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}_B}}$.