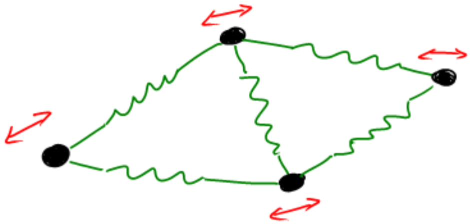
Eigenschwingungen eines mechanischen Systems



um stabile Gleichgewichtslage $x_0 \equiv \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

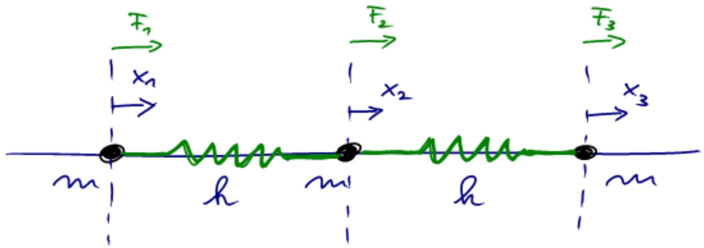
→ rücktreibende Kraft ist linearen Funktion der Auslenkung $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F = -Kx \quad ; \quad K \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

⇒

Schwingungsfrequenzen	⟷	Eigenwerte von K
Schwingungsmoden	⟷	Eigenvektoren von K

einfaches Beispiel:



$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = -k(x_1 - x_2)$$

$$F_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \quad \longrightarrow \quad F \overset{!}{=} -Kx \quad \text{mit}$$

$$F_3 = -k(x_3 - x_2)$$

$$K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Newton</u>: $\quad m\ddot{x}(t) \overset{!}{=} F(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}(t) = -A\,x(t)} \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{m}K = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3D lineare homogene DGL 2. Ordnung $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ <u>Eigenwertproblem</u> $\rightarrow$

Lösungsansatz:

$$\boxed{x_\pm(t) = x_\omega \, e^{\pm i\omega t}} \quad (1) \qquad \omega \in \mathbb{R}, \quad x_\omega \in \mathbb{R}^3$$

$$\omega = ?\,, \quad x_\omega = ?$$

einsetzen in DGL $\ddot{x} = -Ax$ führt auf:

$$\boxed{\omega^2 x_\omega = A x_\omega}$$

d.h. (1) ist Lösung der DGL g.d.w.

$$\boxed{\omega^2 \text{ Eigenwert von } A \text{ mit Eigenvektor } x_\omega}$$

$$A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{k}{m}\tilde{A}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$p(x) = \det(\tilde{A} - x\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$= (1-x)^2(2-x) - 2(1-x) = (1-x)\{(1-x)(2-x) - 2\}$$

$$= (1-x)(x^2 - 3x) = x(1-x)(x-3) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1 = 0$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, $\tilde{\lambda}_3 = 3$

mit Eigenvektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ bestimmt durch $(\tilde{A} - \tilde{\lambda}_i \mathbb{1})v^{(i)} \overset{!}{=} 0$

$v^{(1)}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v^{(2)}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v^{(2)}$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} A = \frac{k}{m}\tilde{A} \text{ besitzt EWe} \\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{k}{m},\ \lambda_3 = \frac{3k}{m} \\ \text{mit EVen } v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \end{array}}$

$\longrightarrow$

6 unabhängige Lösungen $\quad x_{\pm}^{(\ell)}(t) = v^{(\ell)}\, e^{\pm i \omega_\ell t}, \quad \omega_\ell = \sqrt{\lambda_\ell}$

$\ell = 1: \quad \omega_1 = 0; \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\hat{=}$

(„Nullmode")

$\ell = 2: \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\hat{=}$

$\ell = 3: \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}; \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\hat{=}$

$\uparrow$ Schwingungsfrequenzen

$\uparrow$ Schwingungsmoden