Euklidische und unitäre Vektorräume,
orthogonale und unitäre Operatoren / Matrizen,
Adjunktion, selbstadjungierte Operatoren / Matrizen

Erinnerung: (euklidisches) Skalarprodukt eines reellen VRs V

$$\equiv \text{Abb. } \langle \dots, \dots \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u, v \longmapsto \langle u, v \rangle$$

mit Eigenschaften

(i) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ (Linearität)

(ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (Symmetrie)

(iii) $\langle u, u \rangle > 0$ für $u \neq \vec{0}$ (Positivität)

versieht VR V mit euklidischer Geometrie : $\rightsquigarrow$

Norm ($\equiv$ Länge $\equiv$ Betrag) : $\quad |u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Orthogonalität : $\quad u \perp v \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle u, v \rangle = 0$

$\rightarrow$ Gesetze der euklidischen Geometrie !

insbes.: **Cauchy-Schwarz-Ungl.** : $\quad |\langle u, v \rangle| \leq |u|\,|v|$

$\rightarrow$ **euklidischer Raum** := **reeller VR** mit **eukl. Sp.** $\langle \ldots, \ldots \rangle$

(Beispiel: $\mathbb{R}^n$ mit **Standardskalarprodukt** $\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$)

- ein **komplexer** VR erhält „**unitäre Geometrie**" durch ein **hermitesches** (auch: unitäres) **Skalarprodukt** : **unitärer Raum**

  ↳ nach Charles Hermite franz. Mathematiker

Definition:

hermitesches (unitäres) Skalarprodukt eines komplexen VRs V

$\equiv$ Abb. $\langle \ldots, \ldots \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

$u, v \longmapsto \langle u, v \rangle$

mit Eigenschaften:

(i) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

(Linearität im 2. Faktor)

(ii) $\boxed{\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^{*}}$ (Symmetrie)

(iii) $\langle u, u \rangle > 0$ für $u \neq \vec{0}$ (Positivität)

beachte: (i) und (ii) implizieren Antilinearität des S.P. im 1. Faktor:

$$\boxed{\langle \lambda u, v \rangle = \lambda^{*} \langle u, v \rangle}$$

unitärer Raum := komplexer VR mit hermiteschem Skalarprodukt

⇒ Norm (Betrag): $|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Orthogonalität: $u \perp v \quad :\Leftrightarrow \quad \langle u, v \rangle = 0$

→ auch im unitären Raum gilt Cauchy-Schwarz-Ungl.:

$$|\langle u, v \rangle| \le |u| |v|$$

Beispiel eines unitären Raums: $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = (a^T)^* b$$

Orthonormalbasis (ONB)

Eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ eines eukl. / unitären VRs V ist Orthonormalbasis g.d.w. ihre Basisvektoren normiert und paarweise orthogonal sind, d.h.

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow$ Berechnung des SP in Komponenten bzgl. ONB $B = (b_1, \dots, b_n)$:

$$u = \sum_i u_i b_i \quad , \quad v = \sum_i v_i b_i$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle u, v \rangle_V = \sum_i u_i^* v_i} = ({}_B u^T)^* \, {}_B v = \langle {}_B u, {}_B v \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

[denn $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j} \langle u_i b_i, v_j b_j \rangle = \sum_{i,j} u_i^* v_j \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_i u_i^* v_i$]

Komponenten und Abbildungsmatrix bzgl. Orthonormalbasen

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ sei ONB eines euklidischen / unitären VRs V,

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_i = \langle b_i, v \rangle}$$

$\ulcorner$ denn $\langle b_i, v\rangle = \langle b_i, \sum_j v_j b_j \rangle = \sum_j v_j \overbrace{\langle b_i, b_j \rangle}^{\text{„}\delta_{ij}\text{"}} = v_i \lrcorner$

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ sei ONB eines weiteren eukl. / unit. VRs W,

$A \in \mathcal{L}(V, W)$ und ${}_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{B}} = (A_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$;

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_{ij} = \langle c_i, A b_j \rangle}$$

$\ulcorner$ denn A_{ij} ist i-te Komponente von $(A b_j)$ $\lrcorner$

Bsp.: $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto \langle u, x\rangle u \quad \Rightarrow \quad P_{ij} = \langle e_i, P e_j \rangle = \underbrace{\langle e_i, u\rangle}_{u_i} \underbrace{\langle u, e_j \rangle}_{u_j} = u_i u_j$ ✓

$|u| = 1$; ONB $(e_1, \dots, e_n)$

Orthogonale und unitäre Abbildungen

erhalten Längen und Winkel !

$\Rightarrow$ • Mechanik des starren Körpers

• quantenmechanische Zustandsveränderungen

Definition: Orthogonale und unitäre Operatoren / Matrizen

V sei $\left\{ \begin{array}{l} \text{euklidischer} \\ \text{unitärer} \end{array} \right\}$ VR , $A \in \mathcal{L}(V)$

$$A \left\{ \begin{array}{l} \text{orthogonal} \\ \text{unitär} \end{array} \right\} \quad :\Leftrightarrow \quad \langle u, v \rangle \overset{!}{=} \langle Au, Av \rangle \quad \text{für alle } u, v \in V$$

Eigenschaften eines orthogonalen / unitären Operators $A \in \mathcal{L}(V)$:

eukl. / unitär

(i) $|Av| = |v|$

(ii) $v \perp w \iff Av \perp Aw$

(iii) $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ ONB von V

$\iff \mathcal{B}' = (Ab_1, \dots, Ab_n)$ ONB von V

(iv) $\mathcal{B}$ ONB $\rightarrow$ Spaltenvektoren von ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ normiert und paarweise orthogonal

(v) ist λ EW von A, dann $|\lambda| = 1$

(vi) A ist invertierbar

(weitere Eigenschaften folgen)

die <u>normerhaltenden</u> Operatoren sind tatsächlich <u>genau</u> die <u>orthogonalen / unitären</u> Operatoren:

<u>Satz</u> Sei $A \in \mathcal{L}(V,V)$.

$$\boxed{A \text{ orthogonal / unitär} \iff |Av| = |v| \text{ für alle } v \in V}$$

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$" ✓

„$\Leftarrow$": für beliebige $u, v \in V$ ist z.z. dass $\langle u,v\rangle = \langle Au, Av\rangle$;

betrachte dazu $u+v$ (und ggf. $u+iv$):

$$\langle u+v, u+v\rangle \overset{!}{=} \langle A(u+v), A(u+v)\rangle$$

$$\| $$

$$|u|^2 + |v|^2 + \langle u,v\rangle + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=\langle u,v\rangle^*} \overset{!}{=} \underbrace{|Au|^2}_{=|u|^2} + \underbrace{|Av|^2}_{=|v|^2} + \langle Au, Av\rangle + \underbrace{\langle Av, Au\rangle}_{=\langle Au,Av\rangle^*}$$

$\rightarrow$ $\mathrm{Re}\langle u,v\rangle = \mathrm{Re}\langle Au, Av\rangle$; <u>analoge</u> Rechnung mit <u>$u + iv$</u>:

$$\mathrm{Im}\langle u,v\rangle = \mathrm{Im}\langle Au, Av\rangle$$

■

$\Rightarrow$ Drehungen und Spiegelungen : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind linear und lassen Längen unverändert, also <u>orthogonal</u> !

Adjunktion linearer Abbildungen

Definition:

VRe V und W seien entweder beide euklidisch oder beide unitär, $A \in \mathcal{L}(V, W)$;

die zu A adjungierte Abb. $A^+ \in \mathcal{L}(W, V)$ ist definiert durch

$$\boxed{\langle w, Av \rangle_W \overset{!}{=} \langle A^+ w, v \rangle_V}$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$.

Merkschema: $\langle w, Av \rangle = \langle A^+ w, v \rangle$

Beispiele $\longrightarrow$

Bsp. 1: Rotation $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\langle w, R_\varphi v\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ R_{-\varphi} \text{ orthogonal}}}{=} \langle R_{-\varphi} w, \underbrace{R_{-\varphi} R_\varphi}_{= \mathbb{1}} v\rangle = \langle R_{-\varphi} w, v\rangle \overset{!}{=} \langle (R_\varphi)^+ w, v\rangle$$

$$\Rightarrow (R_\varphi)^+ = R_{-\varphi}$$

Bsp. 2: $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{n}| = 1$

$\vec{x} \longmapsto \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle$

$\longrightarrow$ $L^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\lambda \longmapsto \lambda \vec{n}$

denn $\langle \lambda, L\vec{x}\rangle_{\mathbb{R}} \equiv \lambda L\vec{x} = \lambda \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \lambda\vec{n}, \vec{x}\rangle \overset{!}{=} \langle L^+\lambda, \vec{x}\rangle$

Eigenschaften ($\equiv$ Rechenregeln!):

(i) $\quad (A+B)^+ = A^+ + B^+$

(ii) $\quad (\lambda A)^+ = \lambda^* A^+$

(iii) $\quad (AB)^+ = B^+ A^+$

(iv) $\quad (A^+)^+ = A$

(v) $\quad \mathbb{1}^+ = \mathbb{1}$

(vi) $\quad (A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$

(vii) $\quad A \in \mathcal{L}(V, W)$; B ONB von V, C ONB von W:

$$ {}_B(A^+)_C = \left(\left({}_C A_B \right)^T \right)^* \quad ; $$

d. h. „Adjunktion $\hat{=}$ Transposition + komplexe Konjugation"

- (i) und (ii) folgen aus (Anti-)Linearität des Skalarprodukts;
- (iii): $\langle w, (AB)u \rangle = \langle w, A(Bu) \rangle = \langle A^+ w, Bu \rangle = \langle \underbrace{B^+ A^+}_{\overset{!}{=}(AB)^+} w, u \rangle$
- (iv): $\langle w, Av \rangle = \langle A^+ w, v \rangle = \langle v, A^+ w \rangle^* = \langle (A^+)^+ v, w \rangle^* = \langle w, (A^+)^+ v \rangle$
- (v): ✓
- (vi): $\mathbb{1} = A^{-1} A \rightsquigarrow \mathbb{1} = \mathbb{1}^+ = (A^{-1}A)^+ = A^+ (A^{-1})^+$

  $\Rightarrow (A^+)^{-1} = (A^{-1})^+$
- (vii): $B = (b_1, \ldots, b_n)$ sei ONB von V, $C = (c_1, \ldots, c_m)$ ONB von W;

$$\rightarrow ({}_C A_B)_{ij} = \langle c_i, A b_j \rangle = \langle A^+ c_i, b_j \rangle = \langle b_j, A^+ c_i \rangle^*$$

$$({}_B (A^+)_C)^*_{ji}$$

d.h. $\quad {}_B A^+_C = \left(({}_C A_B)^T \right)^*$

mittels Operator-Adjunktion formulieren wir zwei weitere Eigenschaften orthogonaler/unitärer Operatoren:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{(vii)} & A \text{ orthogonal/unitär} & \Longleftrightarrow & A^+ A = \mathbb{1} \\ & & & (\text{d.h. } A^+ = A^{-1}) \\ & & & \\ \text{(viii)} & A \text{ orthogonal/unitär} & \Longrightarrow & |\det A| = 1 \end{array}}$$

zu (vii): A orthogonal/unitär $\Longleftrightarrow$ $\langle u,v\rangle = \langle Au, Av\rangle$ für alle u,v

$\Longleftrightarrow$ $\langle u,v\rangle = \langle u, A^+ A v\rangle$ für alle u,v

$\Longleftrightarrow$ $A^+ A = \mathbb{1}$

zu (viii): A orth./unitär $\Rightarrow$ $\mathbb{1} = A^+ A$ $\Rightarrow$ $1 = \det(A^+ A) = \underbrace{\det(A^+)}_{=(\det A)^*} \det A$

$= |\det A|^2$

d.h. $|\det A| = 1$.

Definition:

$$A : V \to V \quad \text{selbstadjungiert} \quad :\Longleftrightarrow \quad A^+ \overset{!}{=} A$$

(auch: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: symmetrisch
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: hermitesch)