Diagonalisierbarkeit von Operatoren:

$\boxed{\text{unter welchen Anforderungen an } A: V \to V \text{ finden wir Eigenbasis } E = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ ?}}$

$$\Rightarrow \quad {}_E A_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad ; \qquad A v_1 = \lambda_1 v_1 \, .$$

wir zeigen:

(i) $\boxed{\text{Eigenvektoren } v_1, v_2, \ldots, v_\ell \text{ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \text{ sind linear unabhängig}}$

$\Rightarrow$ $\ell \overset{!}{=} \dim V$: A diagonalisierbar!

Falls V unitärer VR:

(ii) $\boxed{A A^+ \overset{!}{=} A^+ A \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ besitzt orthonormale Eigenbasis}}$

d.h. per def.: A normal

d.h. per def.: A unitär diagonalisierbar

→ $\boxed{\text{unitäre und selbstadjungierte Operatoren sind insbesondere normal und damit unitär diagonalisierbar !}}$

- U unitär → $UU^\dagger = \mathbb{1} = U^\dagger U$, d.h. $UU^\dagger = U^\dagger U$

  → U normal ✓

- A selbstadjungiert → $A = A^\dagger$ → $AA^\dagger = AA = A^\dagger A$

  → A normal ✓

zu (i): $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ seien Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$;

z.z.: $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ sind linear unabhängig!

Beweis per Induktion über ℓ: $\ell = 1$: $v_1 \neq 0_V$ lin. unabh. ✓

$(\ell-1) \to \ell$:

gelte $0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_\ell v_\ell$ $\quad \lambda_\ell \quad A$

$$\mathrm{I} \quad 0 = \alpha_1 \lambda_\ell v_1 + \alpha_2 \lambda_\ell v_2 + \dots + \alpha_\ell \lambda_\ell v_\ell$$

$$\mathrm{II} \quad 0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_\ell \lambda_\ell v_\ell \qquad (A v_i = \lambda_i v_i)$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{II}: \quad 0 \overset{!}{=} \alpha_1 \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_1)}_{\neq 0} v_1 + \alpha_2 \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_2)}_{\neq 0} v_2 + \dots + \alpha_{\ell-1} \underbrace{(\lambda_\ell - \lambda_{\ell-1})}_{\neq 0} v_{\ell-1} + \vec{0}$$

nach I.V. $v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}$ lin. unabhängig und damit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{\ell-1} = 0$; wegen $v_\ell \neq \vec{0}$ dann aber auch $\alpha_\ell = 0$ und somit $v_1, v_2, \dots, v_\ell$ linear unabhängig. ∎

zu (ii) : $A: V \to V$, V unitären VR,

d.h. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und es gibt ein hermitesches S.P. $\langle \ldots, \ldots \rangle$.

$\Rightarrow$ $P(t) = \det(A - t)$ faktorisiert vollständig in

Linearfaktoren:

$$P(t) = (\lambda_1 - t)^{\mu_1} (\lambda_2 - t)^{\mu_2} \cdots (\lambda_3 - t)^{\mu_\ell} ,$$

$\rightarrow$ Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ mit Vielfachheiten $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell \in \mathbb{N}_+$,

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \overset{!}{=} \dim V$$

$\hat{=}$ Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ mit Eigenräumen $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_2}$

Vorsicht: wegen $\dim E_{\lambda_i} \leq \mu_i$ (vgl. Übg.sblatt 6)

ist $\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_\ell}) \lneq \dim V$ möglich

$\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar!

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$\rightsquigarrow \quad p(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} = t^2$

$\rightsquigarrow$ doppelte $(\mu_1 = 2)$ Nullstelle = Eigenwert $\lambda_1 = 0$

Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow x_2 = 0$

$\rightsquigarrow$ Eigenraum $E_0 = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subsetneq \mathbb{C}^2$

d.h. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar !

nun zeigen wir (ii): $A: V \to V$, V unitärer VR,

$$\boxed{A \text{ unitär diagonalsierbar} \iff AA^+ = A^+A \quad \Leftrightarrow: A \text{ normal}}$$

dazu erst ein <u>Lemma</u>:

> A sei normaler Operator. Dann gilt:
>
> λ EW von A zum EV v $\iff$ λ^* EW von A^+ zum EV v

<u>Beweis</u>: für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $G_\lambda := A - \lambda \mathbb{1}$ ebenfalls <u>normaler</u> Operator;

$$\text{l.S.} \iff Av - \lambda v = 0 \iff G_\lambda v = 0 \iff \langle G_\lambda v, G_\lambda v \rangle = 0$$

$$\iff \langle v, G_\lambda^+ G_\lambda v \rangle = 0 \iff \langle v, G_\lambda G^+ v \rangle = 0$$

G_λ normal

$$\iff \langle G_\lambda^+ v, G^+ v \rangle = 0 \iff G^+ v = 0 \iff A^+ v = \lambda^* v$$

$$\iff \text{r. S.}$$

☒

Beweis von (ii): „⟹": A unitär diagonalisierbar $\Rightarrow$ bzgl. ON-Eigenbasis

$${}_E A_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ E \text{ ONB!}}}{\Longrightarrow} {}_E A^+_E = \begin{pmatrix} \lambda_1^* & & 0 \\ & \lambda_2^* & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n^* \end{pmatrix} \Rightarrow {}_E A_{E\,E} A^+_E = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & |\lambda_2|^2 & \\ & & \ddots \; |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = {}_E A^+_{E\,E} A_E$$

$$\Rightarrow \quad A A^+ = A^+ A \text{, d.h. } A \text{ normal.}$$

„⟸": per Induktion über $n = \dim V$: $\underline{n=1}$: $Av = \lambda v$ ✓

$\underline{(n-1) \to n}$: charakt. Polynom $p(t)$ von A besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle λ $\to$ λ EW von A mit EV $v \in V$.

$W := \{ w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \} =: v^\perp$ ist $(n-1)$-dim. UVR;

<u>entscheidender Beweisschritt</u>: zeige, dass $\boxed{A(W) \subset W}$ (nächste Seite) →

$\to$ $A|W : W \to W$ ist offenbar normal u. nach I.V. unitär diagonalisierbar, $\to$ es ex ON-Eigenbasis $\tilde{E} = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ zu $A|W$, die mit v zu ON-Eigenbasis $E = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ von A erweitert werden kann,

d. h. A ist unitär diagonalisierbar ∎

noch zu zeigen: $\boxed{A(W) \subset W}$

$W = \{ w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \} = v^\perp$

sei $w \in W$, dann

$$\langle v, Aw \rangle = \langle A^+ v, w \rangle \underset{\substack{A \text{ normal,} \\ \text{Lemma,} \\ Av = \lambda v}}{=} \langle \lambda^* v, w \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, w \rangle}_{\substack{\| \Leftarrow w \in W \\ 0}} = 0 \; ;$$

d.h. $Aw \in W$ ∎