Eigenschaften und Darstellungen normaler Operatoren

gezeigt:
- die normalen Operatoren ($AA^+ = A^+A$) auf unit. VR V sind genau die unitär diagonalisierbaren Operatoren
- unitäre und selbstadjungierte Operatoren sind normal und damit unitär diagonalisierbar

Eigenschaften und Darstellung eines normalen Operators $A: V \to V$

(i) Eigenvektoren v_1 und v_2 zu unterschiedlichen EWen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ von A sind zueinander orthogonal: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$!

(ii) A besitzt orthonormale Eigenbasis $E = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$;

(d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$; $Av_i = \lambda_i v_i$; ${}_E A_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$)

(iii) die Abbildungmatrix ${}_B A_B$ von A bzgl. beliebiger ONB B von V kann durch eine <u>unitäre</u> Basiswechselmatrix diagonalisiert werden:

$$S^+ \, {}_B A_B \, S = {}_E A_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} ; \qquad S S^+ = \mathbb{1} ,$$

(iv) die Eigenwerte eines <u>unitären</u> Operators sind vom Betrag 1,

(v) die Eigenwerte eines <u>selbstadjungierten</u> (<u>hermiteschen</u>) Operators sind <u>reell</u>.

zu (i): v_1 und v_2 seien EVen zu EWe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ von A;

z.z.: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$!

$$0 = \langle v_1, A v_2 \rangle - \langle v_1, A v_2 \rangle = \langle v_1, \underbrace{A v_2}_{= \lambda_2 v_2} \rangle - \langle \underbrace{A^+ v_1}_{= \lambda_1^* v_1}, v_2 \rangle \quad \text{(Lemma!)}$$

$$= \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle - \langle \lambda_1^* v_1, v_2 \rangle = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \langle v_1, v_2 \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

zu (ii): wie in Vrlsg. 18 bewiesen ist A als normaler Operator unitär diagonalisierbar und besitzt damit eine orthonormale Eigenbasis.

zu (iii): ${}_B v_1, \dots, {}_B v_n$ seien die Komponentenvektoren der Basisvektoren von E; dann ist $S := ({}_B v_1, \dots, {}_B v_n)$ offenbar unitär und

$$S^+ \, {}_B A_B \, S = S^+ (\lambda_1 \, {}_B v_1, \dots, \lambda_n \, {}_B v_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

zu (iv): klar, da unitäres A normerhaltend!

zu (v): λ sei EW zu <u>selbstadjungiertem</u> A mit normierten EV v; dann:

$$\lambda = \lambda \langle v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, A v \rangle \overset{A = A^+}{=} \langle A v, v \rangle$$

$$= \langle \lambda v, v \rangle = \lambda^* \langle v, v \rangle = \lambda^*$$

d.h. $\lambda = \lambda^*$ und somit λ reell.

Da die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators grundsätzlich reell sind, gilt auch folgender

Satz

Ein selbstadjungierter Operator A auf einem euklidischen VR V besitzt eine orthonormale Eigenbasis und ist damit diagonalisierbar.

(siehe z.B. G. Fischer, L.A.)

Erinnerung:

$$A \text{ selbstadjungiert/symmetrisch} \quad :\Longleftrightarrow \quad A^{+} = A$$

$$\underset{\mathbb{K} = \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \quad {}_B A_B^{\,T} \overset{!}{=} {}_B A_B$$

Spektraldarstellung normaler Operatoren

A sei normaler Operator auf V mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$;

$P_1, \ldots, P_\ell : V \to V$ seien die Projektionen auf $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_\ell}$,

d.h. $\quad P_i \mid E_{\lambda_i} = \mathbb{1}_{E_{\lambda_i}}$, $\quad P_i \mid E_{\lambda_j} = 0$ für $i \neq j$

$$\left(\rightsquigarrow \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \,, \quad \sum_{i=1}^{\ell} P_i = \mathbb{1}_V \right)$$

dann gilt:

$$\boxed{A = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i P_i} \qquad (*)$$

Spektraldarstellung von A

$\Big[$ zu $(*)$: offenbar $A \mid E_{\lambda_j} \overset{!}{=} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i P_i \right) \Big| E_{\lambda_j}$ für alle $j = 1, \ldots, \ell$ $\Big]$

Simultane Diagonalisierbarkeit

A und B seien unitär diagonalisierbare (d.h. normale) Operatoren auf unitärem VR V; kann man für A und B eine gemeinsame ON-Eigenbasis E finden, d.h. sind A und B simultan diagonalisierbar?

⌈ Fragestellung relevant in der Q.M.:

- Unschärferelation
- Erhaltungsgrößen ⌋

⟶

Definition

- **Kommutator** zweier Operatoren A, B:

$$[A, B] := AB - BA$$

- A und B **kommutieren** / **vertauschen** $:\Leftrightarrow AB = BA$

$$\Leftrightarrow [A,B] = 0$$

Satz

A und B sind simultan diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $[A,B] = 0$

„$\Rightarrow$" $E = (v_1, \dots, v_n)$ sei gemeinsame Eigenbasis, dann für alle $i = 1, \dots, n$:

$$ABv_i = A\lambda_i v_i = \mu_i \lambda_i v_i = \lambda_i \mu_i v_i = B \mu_i v_i = BAv_i$$

$$\rightsquigarrow AB = BA .$$

„$\Leftarrow$" $\lambda_1, \dots, \lambda_e$ seien EWe von B mit Eigenräumen $V_1 = E_{\lambda_1}, \dots, V_e = E_{\lambda_e}$; dann ist

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_e \, .$$

Aufgrund $AB = BA$ gilt $\boxed{A(V_i) \subset V_i}$:

⌜ z.z: für $u \in V_i$ ist $Au \subset V_i = E_{\lambda_i}$; d.h. $B(Au) \overset{!}{=} \lambda_i Au$:

$$B \underline{\underline{Au}} \underset{\substack{\uparrow \\ BA = AB}}{=} ABu \underset{\substack{\uparrow \\ u \in E_{\lambda_i}}}{=} A \lambda_i u = \lambda_i \underline{\underline{Au}} \quad !$$

⌟

$\rightsquigarrow$ $A|V_i : V_i \to V_i$ ist offenbar normal und damit diagonalisierbar $\rightsquigarrow$ Eigenbasis $E_i^{(A)}$; zugleich Eigenbasis von $B|V_i$!

$\rightsquigarrow$ $E = (E_1^{(A)}, \dots, E_e^{(A)})$ ist gemeinsame Eigenbasis von A und B ∎

Hinweis:

nicht behandelt wurden u.A.:

- Jordan-Normalform eines nicht-diagonalisierbaren Operators

- Singulärwertzerlegung eines allg. Operators

siehe dazu z.B. Arens et al., Mathematik
Fischer, L.A.