Untervektorraum, Summe zweier Untervektorräume, Dimensionsformel, Spann (lineare Hülle)

Definition: Eine Teilmenge W eines Vektorraums V ist Untervektorraum (UVR) von V g.d.w.

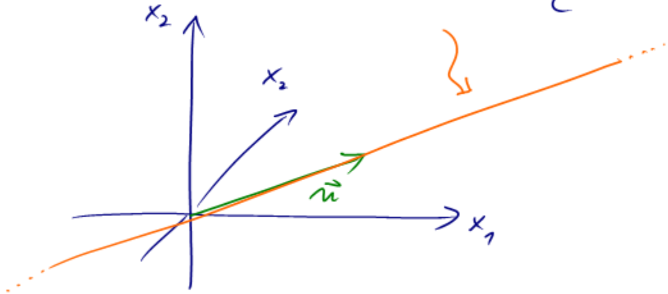
(i) $W \neq \emptyset$ (leere Menge)

(ii) W abgeschlossen unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation; d.h. mit $w, w' \in W$ auch $w + w' \in W$ und $\lambda w \in W$

Beispiele:

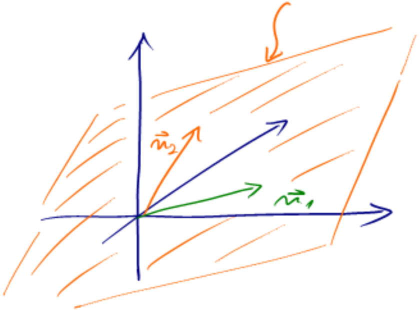
1) $V = \mathbb{R}^3$; Gerade parallel zu $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ durch $\vec{o}$,

$$G_{\vec{u}} = \{ \lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R} \},$$ ist UVR von V



2) $V = \mathbb{R}^3$; Ebene aufgespannt durch $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{o}$ enthaltend,

$$E_{\vec{u}_1, \vec{u}_2} = \{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \},$$ ist UVR von V



<u>Bemerkungen</u>: W und W' seien UVRe eines VRs V

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & W \text{ Vektorraum!} \\ 2) & \dim W \leq \dim V \text{ ; falls } \dim W = \dim V \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dann } W = V \\ 3) & \{\vec{o}_V\} \text{ und } V \text{ sind UVRe von } V \\ 4) & \boxed{W \cap W' \text{ ist UVR von } V} \\ 5) & W \cup W' \text{ i.d.R. } \underline{\text{kein}} \text{ UVR von } V \end{array}}$$

⌈ 1) 2) 3) klar; zu 4): $\vec{o}_V \in W$, $\vec{o}_V \in W' \rightarrow \vec{o}_V \in W \cap W'$ und somit $W \cap W' \neq \emptyset$; Abgeschlossenheit von $W \cap W'$:

seien $u, v \in W \cap W'$ $\rightarrow u, v \in W \xrightarrow{(ii)} u+v, \lambda u \in \underline{W}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \rightarrow u, v \in W' \xrightarrow{(ii)} u+v, \lambda u \in \underline{W'}$

$\rightarrow u+v, \lambda u \in \underline{W \cap W'}$; zu 5): als Übung. ⌋

Definition :

$\boxed{\text{Die \underline{Summe} zweier UVRe } W \text{ und } W' \text{ des VRs } V \text{ ist der UVR } W + W' := \{ w + w' \mid w \in W,\ w' \in W' \}}$

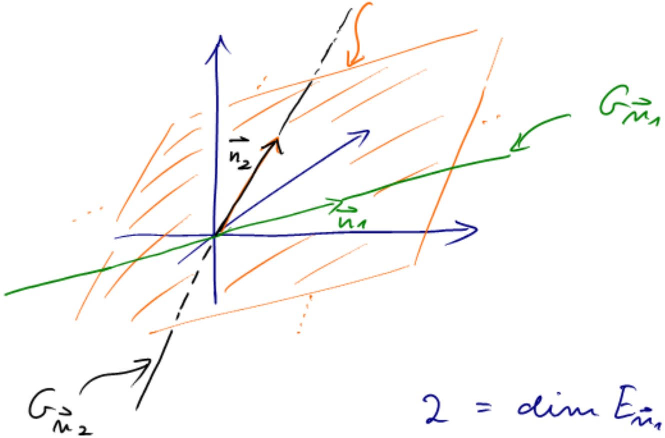
<u>Satz</u> :

$$\boxed{\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')}$$

<u>Dimensionsformel</u>

Beispiele:

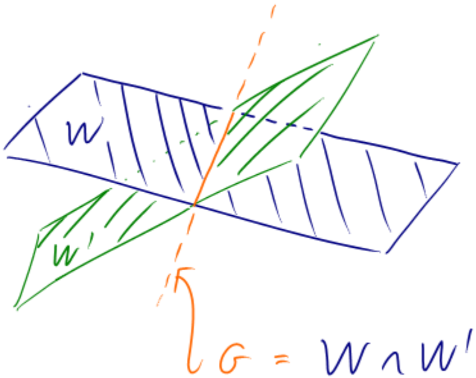
a) $E_{\vec{n}_1,\vec{n}_2} \doteq G_{\vec{n}_1} + G_{\vec{n}_2} \neq G_{\vec{n}_1} \cup G_{\vec{n}_2}$



$$2 = \dim E_{\vec{n}_1,\vec{n}_2} \overset{!}{=} \underset{\substack{\| \\ 1}}{\dim G_{\vec{n}_1}} + \underset{\substack{\| \\ 1}}{\dim G_{\vec{n}_2}} - \underbrace{\dim(G_{\vec{n}_1} \cap G_{\vec{n}_2})}_{\substack{\| \\ 0}}$$

✓

b)



$$W + W' = \mathbb{R}^3$$

$$3 = \dim W + W' \overset{!}{=} \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim W} + \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim W'} - \underset{\substack{\| \\ 1}}{\dim G}$$

✓

Warum gilt die Dimensionsformel allgemein?

Beweisidee: Konstruktion einer geeigneten Basis von $W + W'$!

n, n' bzw. k seien die Dimensionen von W, W' bzw. $W \cap W'$;

$(a_1, \dots, a_k)$ sei Basis von $W \cap W'$; erweitere diese mit geeigneten

$(b_1, \dots, b_{n-k}) \in W \setminus W \cap W'$ zu Basis $(b_1, \dots, b_{n-k}, a_1, \dots, a_k)$ von W,

$(c_1, \dots, c_{n'-k}) \in W' \setminus W \cap W'$ " " $(c_1, \dots, c_{n'-k}, a_1, \dots, a_k)$ von W'

$\longrightarrow$ $(b_1, \dots, b_{n-k}, c_1, \dots, c_{n'-k}, a_1, \dots, a_k)$ ist Basis von $W+W'$!

(siehe z.B. Fischer, L.A.)

$$\longrightarrow \dim(W+W') = \underline{n-k} + \underline{n'-k} + \underline{k}$$

$$= n + n' - k = \dim W + \dim W' - \dim W \cap W'$$

✓

besonders einfach wird die Summe wenn einerseits $W \cap W' = \{\vec{0}\}$ und andererseits $W + W' = V$:

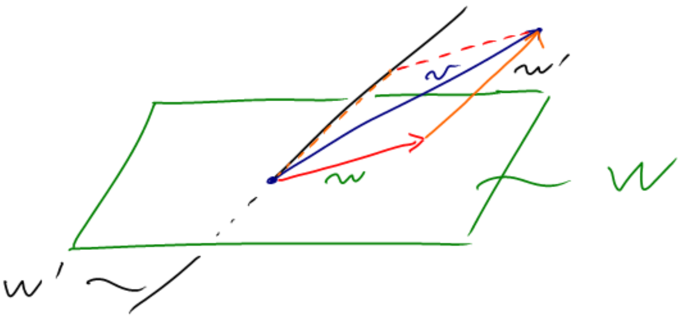
Definition: Der Vektorraum V ist die *direkte Summe*

$$\boxed{V = W \oplus W'}$$

der UVRe W und W' g.d.w. (i) $W \cap W' = \{\vec{0}\}$

(ii) $W + W' = V$

$\rightsquigarrow$ $V \ni v = w + w'$ mit eindeutig bestimmten $w \in W$ und $w' \in W'$.



Der Spann (= lineare Hülle) einer Teilmenge M eines VRs V ist der kleinste UVR von V der M enthält:

Definition: Der Spann von $M \subset V$ ist der UVR

$$\mathrm{Span}\, M := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_i \in M;\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

= „Menge aller Linearkombinationen der Elemente von M"

Beispiele:

1) $W + W' = \mathrm{Span}\, W \cup W'$

2) B Basis von V $\rightarrow$ $V = \mathrm{Span}\, B$

3) $P_2 = \mathrm{Span}\{1, x, x^2\} = \mathrm{Span}\{1, x\} \oplus \mathrm{Span}\{x^2\}$

$= \mathrm{Span}\{1\} \oplus \mathrm{Span}\{x\} \oplus \mathrm{Span}\{x^2\}$