# Selbstadjungierte (≡ hermitesche) Operatoren in der Quantenmechanik

q. m. Zustandsraum $\hat{=}$ komplexer VR $\mathcal{H}$ mit hermiteschem S. P. $\langle \ldots, \ldots \rangle$

$\equiv$ unitärer VR $\mathcal{H}$

Zustand $\hat{=}$ normierter Vektor $\psi \in \mathcal{H}$

einander ausschließende Zustände $\uparrow$ $\downarrow$ $\hat{=}$ orthogonale Zustandsvektoren $\psi_\uparrow, \psi_\downarrow$:

$$\langle \psi_\uparrow , \psi_\downarrow \rangle \overset{!}{=} 0$$

physikalische Größe ?

$\longrightarrow$

physikalische Größe $A$ in q. m. Beschreibung:

$\Rightarrow$ nimmt in paarweise einander ausschließenden Zuständen

$\hat{=}$ paarweise orthogonalen, normierten Zustandsvektoren

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H} \qquad (\psi_\uparrow, \psi_\downarrow)$$

reelle Werte

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \qquad (+\mu_0, -\mu_0)$$

an

Projektor auf Span $(\varphi_i)$

$\longrightarrow$ hermitescher Operator $\boxed{\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i}$

$$(\hat{\mu} = \mu_0 P_\uparrow - \mu_0 P_\downarrow)$$

Messpostulat: System im Zustand $\psi \in \mathcal{H}$
(Born)

$\rightarrow$ Messung der Größe $A$ ergibt Messwert $a_i$
mit Wahrscheinlichkeit

$$p_i = |\langle \varphi_i , \psi \rangle|^2 \equiv \langle \psi , P_i \psi \rangle \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ q. m. Erwartungswert der Größe $A$ bei Messung im Zustand $\psi$:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \overset{(*)}{\equiv} \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \psi , P_i \psi \rangle = \langle \psi , \underbrace{\Big( \sum_{i=1}^{n} a_i P_i \Big)}_{=: \hat{A}} \psi \rangle$$

d.h. $\boxed{\langle A \rangle_\psi = \langle \psi , \hat{A} \psi \rangle}$