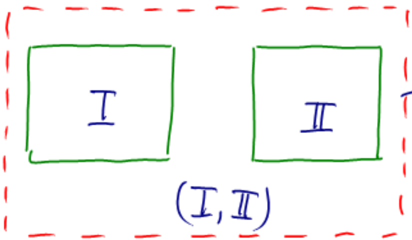
Tensorprodukt

Motivation aus der Quantenmechanik:

$\boxed{\text{Was ist der Zustandsvektorraum eines quantenmechanischen „Zwei-Teilchen"-System?}}$

$\mathcal{H}_I$ ←

unitären VR



→ $\mathcal{H}_{II}$, unitären VR

?

$$\mathcal{H}_{I,II} = \ ?$$

?

$$\dim \mathcal{H}_{I,II} = \ ?$$

klassische Mechanik:

1-Teilchen-Zust.-raum

1-Teilchen-Zustand $\quad x = (\vec{r}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^6 \equiv \underline{\underline{\Gamma_1}}$

2-Teilchen-Zustand $\quad x = (x_1, x_2) = (\vec{r}_1, \vec{p}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_2) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$

$= \underline{\underline{\mathbb{R}^{12} = \Gamma_2}}$

$\vdots$

N-Teilchen-Zustand $\quad x = (x_1, \dots, x_N) = (\vec{r}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_N)$

$\in \mathbb{R}^6 \times \dots \times \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^{6N} = \underline{\underline{\Gamma_N}}$

klassische Mechanik: $\quad \boxed{\dim \Gamma_N = \underline{\underline{N}} \cdot \dim \Gamma_1} \leftarrow$ linear in N

Quantenmechanik: $\quad \boxed{\dim \mathcal{H}_N \overset{!}{=} (\dim \mathcal{H}_1)^{\underline{\underline{N}}}}$

(s.u.)

N-faches Tensorprodukt von $\mathcal{H}_1$ $\qquad$ exponentiell in N !!

exponentielle Abhängigkeit der Zustandsraumdimension von N macht Berechnung eines quantenmechanischen N-Teilchensystems für $N \gg 1$ extrem schwierig!

Beispiel: 1 Spin-$1/2$: $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{\psi_\uparrow, \psi_\downarrow\} \rightarrow \dim \mathcal{H}_1 = 2$

$\downarrow$

300 Spin-$1/2$: $\dim \mathcal{H}_{300} = (\dim \mathcal{H}_1)^{300} = 2^{300}$

$\approx 10^{90} \ggg 10^{80} \approx$ Anzahl Protonen im Universum

Lösung: Quantencomputer! ? ! ? ...

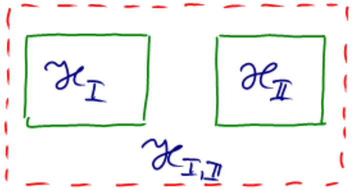
klassische Mechanik: 1-Teilchen $\rightarrow \Gamma_1 = \mathbb{R}^6$, $\dim \Gamma_1 = 6$

$\downarrow$

300-Teilchen $\rightarrow \dim \Gamma_{300} = 300 \cdot \dim \Gamma_1$

$= 1800$ ✓

Konstruktion des q.m. Zustandsraum $\mathcal{H}_{I,II}$ $\longrightarrow$ Definition des Tensorprodukts



System I : Größe A mit n Messwerten $a_1, a_2, \dots, a_n$ in orthonormalen Eigenzuständen $v_1, v_2, \dots, v_n \equiv$ ONB B_I von $\mathcal{H}_I$

System II : Größe B mit m Messwerten $b_1, b_2, \dots, b_m$ in orthonormalen Eigenzuständen $w_1, w_2, \dots, w_m$ = ONB B_{II} von $\mathcal{H}_{II}$

$\Rightarrow$ System (I,II) : Größe (A, B) mit $n \cdot m$ Messwerten

$$
\begin{array}{llll}
(a_1, b_1), & (a_1 b_2), & \dots\dots, & (a_1 b_m), \\
(a_2 b_1), & (a_2 b_2), & \dots\dots, & (a_2 b_m), \\
\vdots & & & \\
(a_n b_1), & (a_n b_2), & \dots\dots, & (a_n b_m).
\end{array}
$$

$\longrightarrow$

$\rightsquigarrow$ Größe (A, B) $\hat{=}$ hermiteschem Operator „$A \otimes B$" mit

$n \cdot m$ orthonormalen Eigenzuständen $\equiv$ Eigenvektoren

$$
\begin{array}{llll}
„v_1 \otimes w_1", & „v_1 \otimes w_2", & \ldots, & „v_1 \otimes w_m", \\
„v_2 \otimes w_1", & „v_2 \otimes w_2", & \ldots, & „v_2 \otimes w_m", \\
\vdots & & & \\
„v_n \otimes w_1", & „v_n \otimes w_2", & \ldots, & „v_n \otimes w_m"
\end{array}
$$

Superpositionsprinzip der QM:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{I,II} = \text{Span}\left\{ „v_i \otimes w_j" \right\}_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} \\
&\dim \mathcal{H}_{I,II} = n \cdot m = \dim \mathcal{H}_I \cdot \dim \mathcal{H}_2
\end{aligned}
}
$$

Definition:

Tensorproduktraum zweier VRe V und W

$$V \otimes W := \operatorname{Span}\{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

wobei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V und

$w_1, \dots, w_m$ Basis von W;

Tensorprodukt $\otimes : V \times W \to V \otimes W$

$$(v, w) \mapsto v \otimes w$$

ist per def. linear in beiden Faktoren, d.h.

- $a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$
- $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$
- $a \otimes (\lambda b) = \lambda (a \otimes b) = (\lambda a) \otimes b$

- $\{ v_i \otimes w_j \}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ ist Basis von $V \otimes W$

$\rightarrow$ $\boxed{\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W}$

Definition unabhängig von Wahl der Basen?

Ja, denn $\operatorname{Span}\{ v_i \otimes w_j \} \overset{!}{=} \operatorname{Span}\{ a \otimes b \mid a \in V, b \in W \}$

Basis-unabhängig!

„$\subset$" ✓

„$\supset$" mit $a = \sum_i a_i v_i$, $b = \sum_j b_j w_j$ ist wegen Linearität
$a \otimes b = \sum_{ij} a_i b_j \, v_i \otimes w_j \in \operatorname{Span}\{ v_i \otimes w_j \}$; wegen
Abgeschlossenheit des Spans unter Linearkombination
dann auch $\operatorname{Span}\{ a \otimes b \mid a \in V, b \in W \} \subset \operatorname{Span}\{ a_i \otimes b_j \}$ ∎

allgemeines $u \in V \otimes W$ i.d.R. *nicht* Tensorprodukt zweier Vektoren $v \in V$ und $w \in W$; d.h. für *alle* $v \in V$, $w \in W$

$$u \neq v \otimes w \quad !$$

(aber natürlich u L.K. der $v_i \otimes w_j$: $u = \sum u_{ij} \, v_i \otimes w_j$)

QM:

- Zustand φ *seperabel* $:\Leftrightarrow$ $\varphi = u \otimes v$ für geeignete $u \in V$, $v \in W$

- Zustand φ *verschränkt* $:\Leftrightarrow$ φ *nicht seperabel*

Definition:

Operator-Tensorprodukt

$$\mathcal{L}(V,V) \times \mathcal{L}(W,W) \longrightarrow \mathcal{L}(V\otimes W,\, V\otimes W)$$
$$(A\,,\,B) \longmapsto A\otimes B$$

mit $A\otimes B$ def. durch

$$\boxed{(A\otimes B)(v\otimes w) := (Av)\otimes(Bw)}$$

und lineare Fortsetzung für bel. $u \in V\otimes W$.

d.h. mit $u = \sum_{ij} u_{ij}(v_i \otimes w_j)$ ist

$$(A\circ B)u = (A\circ B)\Big(\sum_{ij} u_{ij}\,(v_i\otimes w_j)\Big) = \sum_{ij} u_{ij}\,\underline{(A\otimes B)(v_i\otimes w_j)}$$
$$= \sum_{ij} u_{ij}\,\underline{(Av_i)\otimes(Bw_j)}\,.$$