Fouriertransformation, δ-Distribution / δ-Funktion, Fourierreihe

$\rightarrow$ z.B zur Lösung (partieller) DGLen in Mechanik, ED, QM, Stat. Phys.

Erinnerung: reelle / komplexe / vektorwertige Funktionen können addiert und skalarmultipliziert werden und bilden somit Vektorraum:

z.B. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad\to\quad$ $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \lambda f(x)$$

oft zweckmäßig: stelle eine Fkt. f als Linearkombination der Elemente eines vollständigen Funktionensystems („Basis") dar!

$\longrightarrow$

„Fouriertransformation": wähle ebene Wellen $\chi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\boxed{\chi_k(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ikx}} \quad , \quad \text{Wellenzahl } k \in \mathbb{R}$$

$\to$ vollständiges Funktionensystem $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{R}}$

$$\to \quad \boxed{f(x) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dk \; \hat{f}(k) \, \chi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(k) \, e^{ikx}}$$

Fkt. f als Linearkombination ebener Wellen

„Basis"-Fkt χ_k

„χ_k-Komponente" von f

„Summation über alle Basis-Fkten"

Aufgabe: bestimme zu geg. Fkt. $f(x)$ die „Komponenten" $\hat{f}(k)$!

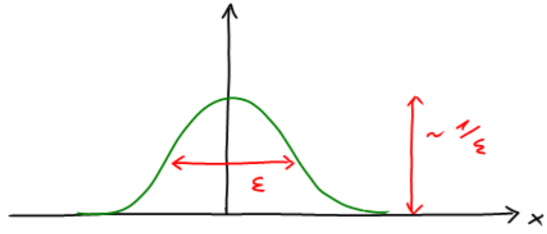
hier: mittels δ-Funktion !

δ - Funktion (eigentlich δ- Distribution, s. u.)

Definition

Die δ- Funktion $\delta(x)$ ist die Grenzfunktion im Limes $\varepsilon \to 0$ der ε- Gauß-Fkt. (" ε-regularisierten δ-Fkt.")

$$\delta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}} \, e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$$



$\downarrow \; \varepsilon \to 0$

$\delta(x)$ ist somit äquivalent definiert durch die Eigenschaften

(i) $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$

(ii) $\int_a^b \delta(x) \, dx = 1$ sofern $a < 0 < b$

(iii) $\delta(x)$ beliebig oft diff.bar

Eigenschaften ("Rechenregeln") der δ-Funktion:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)}$$

(sofern f stetig in 0, $a < 0 < b$)

⌈ denn $\int_a^b f(x)\, \delta_\varepsilon(x)\, dx \overset{\varepsilon \to 0}{=} f(0) \underbrace{\int_a^b \delta_\varepsilon(x)\, dx}_{=1} = f(0)$ ⌋

allgemein:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0)}$$

(sofern f stetig in x_0, $a < x_0 < b$)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x)\,dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)}$$

(sofern f stetig diff.bar in 0, $a < 0 < b$)

denn für $\varepsilon \to 0+$ ist

$$\int_a^b f(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\delta_\varepsilon(x)\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{f(x)\,\delta_\varepsilon(x)\Big|_a^b}_{=\,0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x)\,\delta_\varepsilon(x)\,dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

<u>allgemeiner</u>:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x-x_0)\,dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$$

→ k-fache Anwendung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\frac{\partial^k}{\partial x^k}\,\delta(x-x_0)\,dx = (-1)^k\,\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0)}$$

<u>Substitutionsregel</u>: sei $g: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ invertierbare Funktion mit genau einer einfachen Nullstelle bei $x_0 \in]\alpha,\beta[$;

dann

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,\delta(g(x))\,dx = f(x_0)\cdot\frac{1}{|g'(x_0)|}}$$

[unter Annahme, dass g monoton steigend (fallend):

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\delta(g(x)) \underset{x=g^{-1}(u)}{=} (-)\int_a^b f(g^{-1}(u))\,\delta(u)\cdot\underbrace{(g^{-1})'(u)}_{\hat{=}\,1/g'(g^{-1}(u))}\,du$$

$$= \int_a^b \frac{f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|}\cdot\delta(u)\,du \underset{g^{-1}(0)=x_0}{=} \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$]

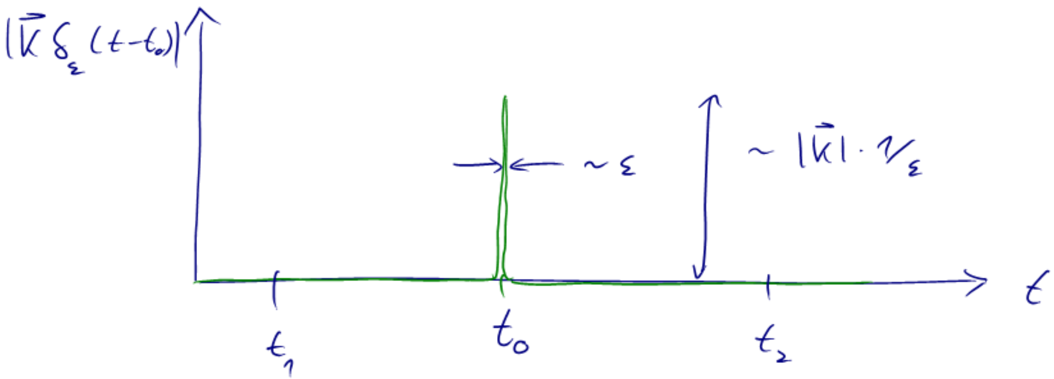
Anwendungsbeispiele :

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{\sin h x}{\sqrt{1+\cos^2 h x}}\, \delta(x-x_0)\, dx \stackrel{!}{=} \frac{e^{-x_0^2} \sin h x_0}{\sqrt{1+\cos^2 h x_0}}$$

2) Kraftstoß der Stärke $\vec{K}$ zur Zeit t_0 :

beschrieben durch zeitabhängige Kraft $\boxed{\vec{F}(t) = \vec{K}\, \delta(t-t_0)}$

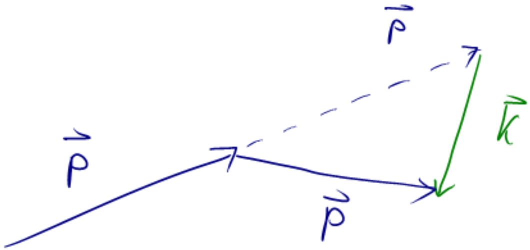


z.B Kraftstoß auf freies Teilchen mit Impuls $\vec{p}(t_1) \equiv \vec{p}$;

$$\vec{p}(t_2) \equiv \vec{p}\,' = ?$$

Newton: $$\dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}(t) \xrightarrow{\int_{t_1}^{t_2} dt} \underline{\vec{p}\,' - \vec{p}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{K}\,\delta(t-t_0)\,dt = \underline{\vec{K}}$$



Wir schließen mit einer kurzen Erläuterung des Begriffs Distribution in der Mathematik:

$$\boxed{\text{Distribution } D \text{ (in } \mathbb{R}) := \text{lineare Abb. } D: \mathcal{T} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto D[f]}$$

hierbei ist $\mathcal{T}$ der Raum der sog. Testfunktionen auf $\mathbb{R}$:

⌈ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Testfunktion g.d.w. f bel. oft diff.bar ist und zudem nur auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ verschieden von 0 ist ⌋

Beispiele

1) für jede (hinreichend glatte) Fkt $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die <u>reguläre Distribution</u> R_u erklärt durch

$$R_u[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, u(x)\, dx$$

Linearität: für $f, g \in \mathcal{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$R_u[f+\lambda g] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)+\lambda g(x))\, u(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, u(x)\, dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, u(x)\, dx = R_u[f] + \lambda R_u[g]$$

Eine Distribution, die <u>nicht</u> mittels einer geeigneten Fkt. u als reguläre Distribution R_u geschrieben werden kann, heißt <u>singulär</u>.

2) <u>δ-Distribution an der Stelle x_0</u>: $\delta_{x_0} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$

erklärt durch

$$\boxed{\delta_{x_0}[f] := f(x_0)},$$

ist <u>singuläre</u> Distribution und tatsächlich <u>Grenzdistribution</u> der <u>regulären</u> Distributionen $\delta_{x_0,\varepsilon}$, erklärt für $\varepsilon > 0$ durch

$$\delta_{x_0,\varepsilon}[f] := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta_\varepsilon(x - x_0)\, dx .$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{x_0,\varepsilon} \overset{!}{=} \delta_{x_0}}$$

⌈ dem

$$\delta_{x_0,\varepsilon}[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta_\varepsilon(x-x_0) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x_0) \equiv \delta_{x_0}[f] \quad \rfloor$$

Die <u>Ableitung</u> einer allg. Distribution D ist erklärt

durch
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} D[f] := - D\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]}$$

⌈ denn das läuft im Falle einer <u>regulären</u> Distribution R_u genau auf Ableitung der Funktion u hinaus:

$$\frac{\partial}{\partial x} R_u [f] \overset{\text{Def.}}{=} - R_u\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x)\, u(x)\, dx$$

$$\underset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{- f(x)\, u(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\text{, da } f \text{ Testfkt.}} + \int f(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x)\, dx = R_{\frac{\partial u}{\partial x}}[f]$$

. ⌋