Fouriertransformation = Darstellung einer Fkt. $f(x)$ als Linearkombination ebener Wellen (vgl. Vrlsg 23)

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}}$$

Bestimmung der „Komponenten" $\hat{f}(k)$?

es genügt, $\delta_\varepsilon(x)$ bzw $\delta(x)$ als Linearkombination ebener Wellen darzustellen:

$$\boxed{\delta_\varepsilon(x) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-k^2\varepsilon^2/2}\, e^{ikx}} \qquad (1)$$

(1) zeigen wir mittels (auch anderweitig sehr hilfreichem)

"Gauß-Integral"

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2 + bu}\, du \overset{!}{=} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{b^2/4a}, \quad \text{für } \begin{array}{l} a \in \mathbb{R}_+ \\ b \in \underline{\underline{\mathbb{C}}} \end{array}}$$

[denn

$$\text{l.S.} \underset{u = v/\sqrt{a}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 + \frac{b}{\sqrt{a}} v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(v - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + b^2/4a}\, dv$$

$$\underset{v = x + b/2\sqrt{a}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{b^2/4a} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}_{= \sqrt{\pi} \text{ (Ana. I)}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{e^2/4a} = \text{r.S.}$$

]

mit $u = k$, $a = \varepsilon^2/2$, $b = ix$ erhalten wir genau (1):

$$\underline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\varepsilon^2 k^2/2}\, e^{ikx}} \underset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon^2}}\, e^{-x^2/2\varepsilon^2} \underset{\text{Vrlsg. 23}}{=} \underline{\delta_\varepsilon(x)}$$

nun rechnen wir mit (1) : $\delta_\varepsilon(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} e^{-\varepsilon^2 k^2/2}$, im

Limes $\varepsilon \to 0$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \delta_\varepsilon(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)} e^{-\varepsilon^2 k^2/2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, e^{-iky}\, e^{-\varepsilon^2 k^2/2} \right]}_{\overset{!}{=}\, \hat{f}(k)} e^{ikx}$$

$$\left(f(x) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, e^{ikx} \right)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon^2 k^2/2} = 1$$

$$\boxed{\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, e^{-iky}}$$

Definition

Die Fouriertransformierte der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ ist die Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $k \mapsto \hat{f}(k)$, definiert durch:

$$\boxed{\hat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ikx}}$$

← Fouriertransformation von f auf $\hat{f}$

Satz: es gilt:

$$\boxed{f(x) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, e^{ikx}}$$

← inverse Fouriertransformation von $\hat{f}$ auf f

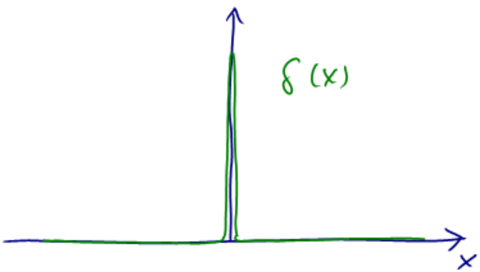
beachte: Fouriertrafo und inverse Fouriertrafo bis auf Faktor 2π und Vorzeichen in e^{-ikx} bzw e^{+ikx} identisch!

<u>Beispiele</u>:

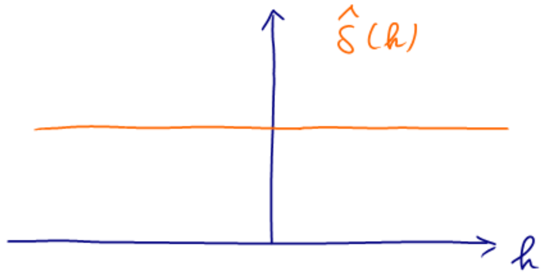
1) Fouriertransformierte von $\delta(x)$:

$$\hat{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(x) \, e^{-ikx} = 1$$

$$\boxed{\hat{\delta}(k) = 1}$$



$\xrightarrow{\text{F.T.}}$



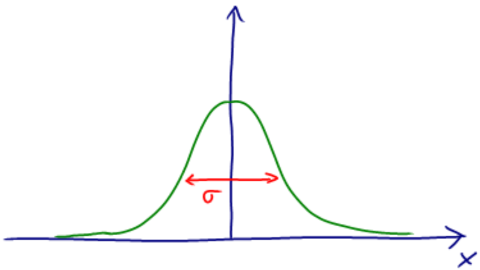
2) Fouriertransformation der Gaußschen Glockenkurve

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-x^2/2\sigma^2} :$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\hat{f}_\sigma(k) = e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}} \quad \longleftarrow$$

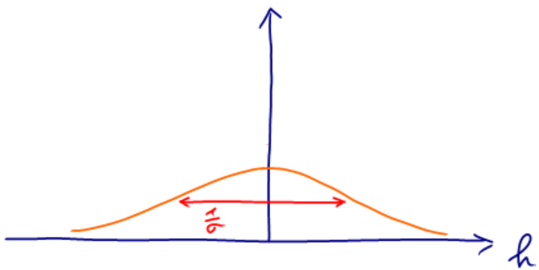
bis auf Faktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ Gaußsche Glockenkurve der Varianz $1/\sigma$

(vgl. Übg.)

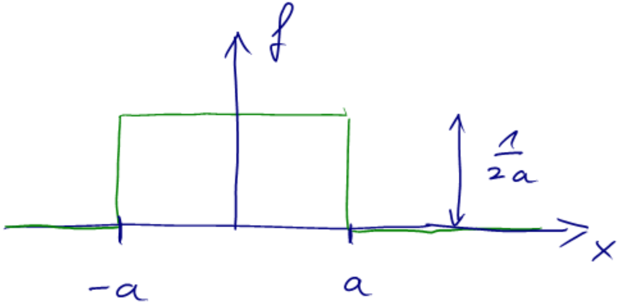


F. T.

$\longrightarrow$

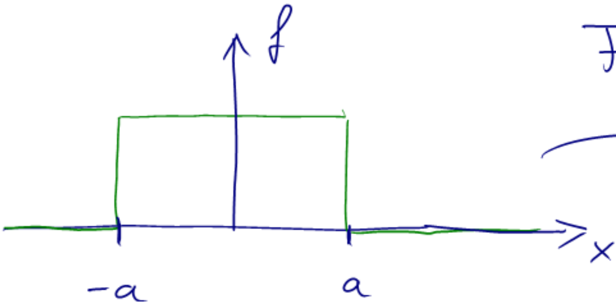


3) F. T. der (normierten) Kastenfunktion der Breite $2a$:

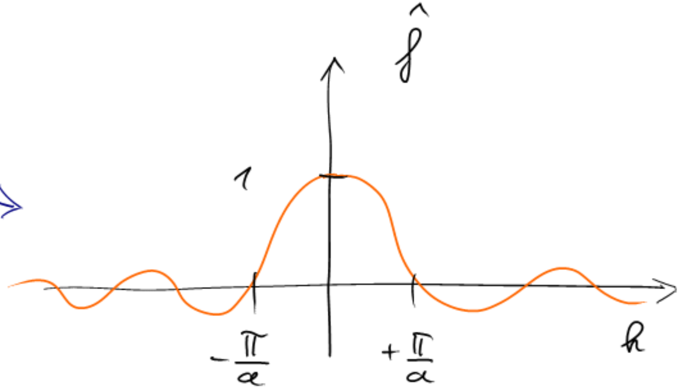


$$f(x) := \begin{cases} 0 & : |x| \geq a \\ \frac{1}{2a} & : |x| < a \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \hat{f}(k) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} dx\; e^{-ikx} = \frac{1}{2a}\,\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{-a}^{a} = \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2iak} = \frac{\sin ka}{ka}$$



F. T.



4) F. T. der ebenen Welle $\chi_{k_0}(x) = \frac{1}{2\pi} e^{i k_0 x}$:

$$\boxed{\hat{\chi}_{k_0}(k) = \delta(k - k_0)}$$

d. h. $$\boxed{\widehat{e^{i k_0 x}}(k) = 2\pi \, \delta(k - k_0)}$$

⌈ denn $$\chi_{k_0}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \underbrace{\delta(k - k_0)}_{= \hat{\chi}_{k_0}(k)} e^{i k x} \quad ! \quad ⌋$$

insbesondere für $k_0 = 0$:

$$\rightarrow \quad \boxed{\hat{1}(k) = 2\pi \, \delta(k)}$$

Allgemeine Eigenschaften der Fouriertransformation

(i) F. T. ist linear:

$$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g},$$

$$\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}.$$

(ii) Translation um x_0 $\longrightarrow$ Multiplikation mit e^{-ikx_0}

sei $f_{x_0}(x) := f(x - x_0)$, dann

$$\boxed{\hat{f}_{x_0}(k) = e^{-ikx_0} \cdot \hat{f}(k)}$$

(iii) Ableitung nach x $\longrightarrow$ Multiplikation mit ik

$$\boxed{\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(k) = ik\, \hat{f}(k)}$$

(i) Folgt aus Linearität des Integrals.

zu (ii):

$$f_{x_0}(x) \equiv f(x-x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, e^{ik(x-x_0)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \underbrace{e^{-ikx_0}\, \hat{f}(k)}_{\overset{!}{=}\ \hat{f}_{x_0}(k)}\, e^{ikx}$$

zu (iii):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \underbrace{ik\, \hat{f}(k)}_{\overset{!}{=}\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(k)}\, e^{ikx}$$

weitere Beispiele:

5) mit $\cos(k_0 x) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{ik_0x}} + \underbrace{e^{-ik_0x}}\right)$ und Linearität:

$\downarrow$ F.T. (vgl. Bsp 4))

$$\widehat{\cos(k_0x)}(k) = \frac{1}{2}\left(\overbrace{2\pi\delta(k-k_0)} + \overbrace{2\pi\delta(k+k_0)}\right)$$

$$= \pi\,\delta(k-k_0) + \pi\,\delta(k+k_0)$$

6)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-x^2/2\sigma^2} \xrightarrow{\text{F.T.}} \hat{f}(k) = e^{-\sigma^2k^2/2}$$

Translation um x_0 $\qquad\qquad$ $\cdot e^{-ikx_0}$

$$f_{x_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \xrightarrow{\text{F.T.}} \hat{f}_{x_0}(k) = e^{-ikx_0}\, e^{-\sigma^2k^2/2}$$

Anwendungsbeispiel: Wärmeleitung $\longrightarrow$ nächste Vlsg.