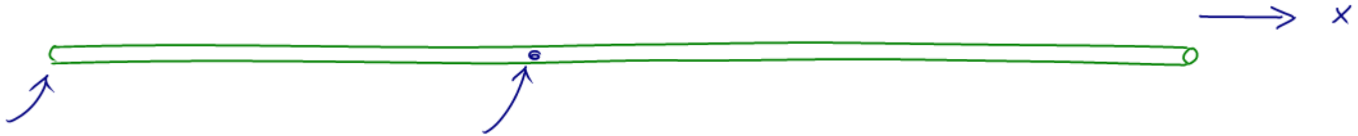
Anwendungsbeispiel Fouriertransformation: Wärmeleitung

⌐ mathematisches Problem um ~1800, 1807 preisgekrönte Lösung von Joseph Fourier (1768-1830) mittels Fouriertransf.; genauer: mittels Fourier-Reihen (später!) ⌟

physikalisches Problem: Wie breitet sich Wärme etwa in einem eindimensionalen (1D) Wärmeleiter aus?



zB. Kupferstab

$T(x,t)$ = Temperatur am Ort x zur Zeit t

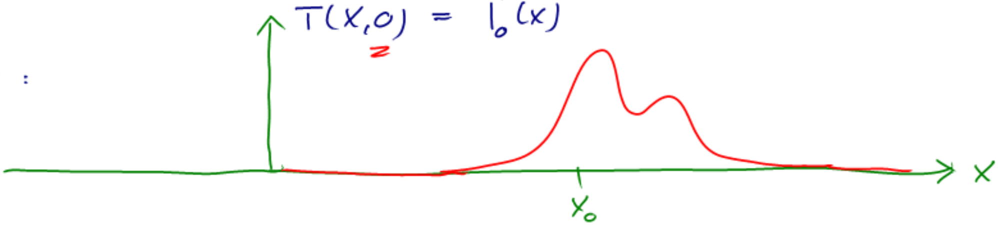
(relativ zur Temp. $T_0 = 273\,K$)

konkrete Frage: Gegeben $T(x,0)$, wie lautet $T(x,t)$ für $t>0$?

etwa:

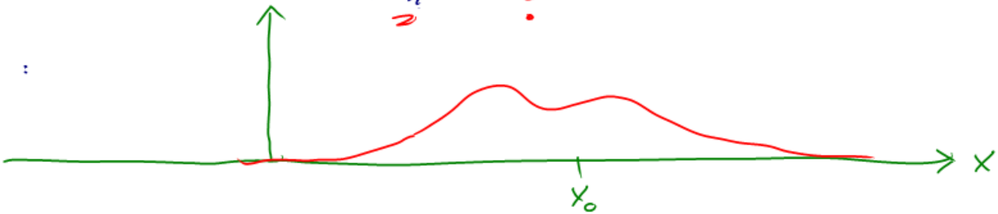
$t = 0$:

$T(x,\underline{\underline{0}}) \overset{!}{=} T_0(x)$



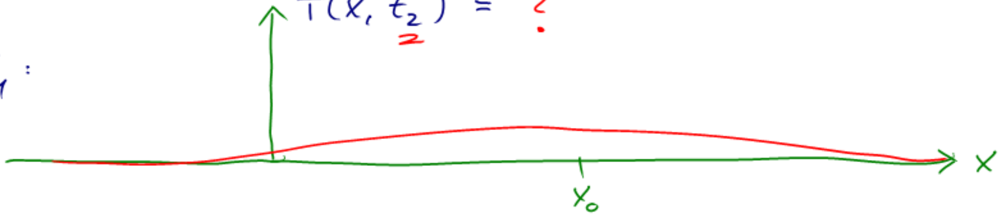
$t_1 > 0$:

$T(x,\underline{\underline{t_1}}) = ?$



$t_2 > t_1$:

$T(x,\underline{\underline{t_2}}) = ?$



zeitabhängiges Temperaturfeld $T = T(\vec{r}, t)$ (3D) bzw. $T = T(x, t)$ genügt

Wärmeleitungsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \underline{\underline{a}}\, \Delta T} \quad \text{(3D)} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \underline{\underline{a}}\, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{(1D}$$

- $\underline{\underline{a}}$ materialspezifische Temperaturleitfähigkeit, $[a] = \frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}}$
- $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

woher? Wärmestromdichte $\vec{q}(\vec{r}, t)$ genügt

Wärmeleitf.

$$\boxed{\vec{q} = -\underline{\underline{\lambda}}\, \operatorname{grad} T}$$

(Fourier)

- Wärme-Energiedichte $u = \varrho\, c\, T$

  c: spez. Wärmekapazität

  ϱ: Massendichte

- wegen Energieerhaltung genügen $u(\vec{r}, t)$ und $\vec{q}(\vec{r}, t)$

→

Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0}$$

$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$

$u = \rho c T$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T}$$

Wärmeleitungsgleichung

mit $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

→ mathematisches Problem (10):

finde Lösung ≡ zeitabhängiges Temperaturfeld $T(x,t)$ der Wärmeleitungsgl.; d.h. (*)

partielle DGL →

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) \overset{!}{=} a \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) \quad \text{für alle } t>0, \; x \in \mathbb{R}}$$

zu gegeben Randwerten bei $t=0$; d.h.

$$\boxed{T(x,0) = T_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}}$$

Lösungsstrategie: F.T. in Ortsvariable x wandelt wegen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik\cdot} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -k^2\cdot}$$

partielle DGL in gewöhnliche DGL um !

→

F. T. (in x) der Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{tikzcd} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \overset{!}{=} a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \arrow[d, bend right=60, "\text{F. T. im } x"'] \arrow[d, bend left=60, "\text{F. T. im } x;\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow -k^2"] \\ \boxed{\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(k,t) \overset{!}{=} -a k^2 \hat{T}(k,t)} \end{tikzcd}$$

<u>einfache</u> lin. DGL. 1. Ordnung für $\hat{T}(\underline{k},t)$ vom Typ $\dot{y} = \lambda y$

$$\rightarrow \quad \boxed{\hat{T}(\underline{k},t) = \hat{T}_0(k)\, e^{-ak^2 t}} \qquad (*)$$

hieraus folgt $T(x,t)$ durch inverse F. T.:

$$\boxed{T(x,\underline{t})} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{T}(\underline{k,t})\, e^{ikx} \overset{(*)}{=} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{T}_0(k)\, e^{-ak^2 \underline{t} + ikx}} \; (**)$$

wie wählen wir $\hat{T}_0(k)$? $\rightarrow$

für $t = 0$ ergibt Relation (∗∗) offenbar

$$T_0(x) \overset{!}{=} \underline{T(x,0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \, \underline{\hat{T}_0}(k) \, e^{ikx}$$

d.h. $\underline{\hat{T}_0}(k)$ ist genau die <u>Fouriertransformierte</u> der gegebenen <u>Randwerte</u> (= Temperaturfeld bei $t=0$) $\underline{\hat{T}_0(x)}$

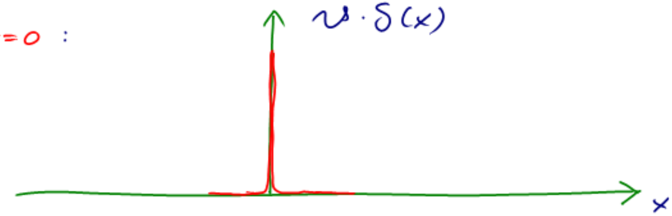
→ <u>ein Verfahren zur Lösung des Wärmeleitungsproblems zu geg. Randwerten $T_0(x)$ bei $t = 0$:</u>

(i) F. T. von $T_0(x)$ auf $\hat{T}_0(k)$

(ii) $\hat{T}(k,t) := \hat{T}_0(k) \, e^{-ak^2 t}$

(iii) inverse F. T. von $\hat{T}(k,t)$ auf $T(x,t)$

Beispiel: $T_0(x) = \vartheta\,\delta(x)$, t=0 :



(i) F. T. von $T_0(x) = \vartheta\,\delta(x)$ auf $\hat{T}_0(k)$:

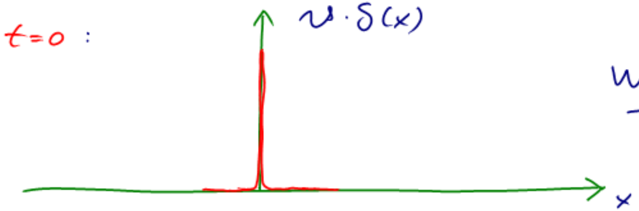
$$\hat{T}_0(k) = \vartheta\,\hat{\delta}(k) \overset{\text{Bsp 1)}}{=} \vartheta\cdot 1 = \vartheta$$

(ii) $$\hat{T}_0(k,t) = \hat{T}_0(k)\, e^{-ak^2t} = \vartheta\, e^{-ak^2t}$$

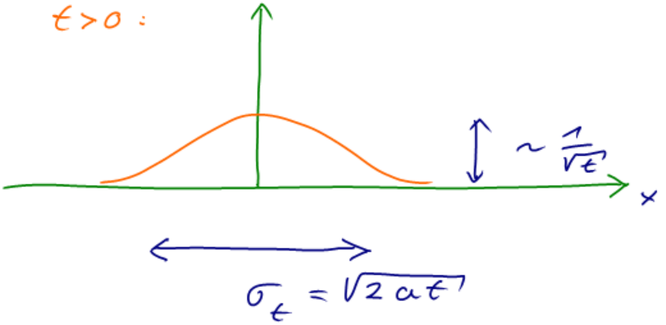
(iii) inverse F. T. von $\hat{T}_0(k,t) = \vartheta\, e^{-ak^2t}$ auf $T(x,t)$:

$$\underline{\underline{T(x,t)}} = \vartheta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ak^2t}\, e^{ikx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß!}}}{=} \underline{\underline{\frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x^2/4at}}}$$

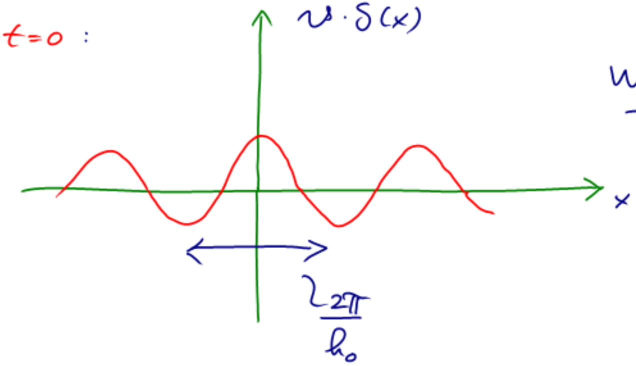
↑ Gauß-Glocke der Breite $\underline{\underline{\sigma_t}} = \underline{\underline{\sqrt{2at}}}$



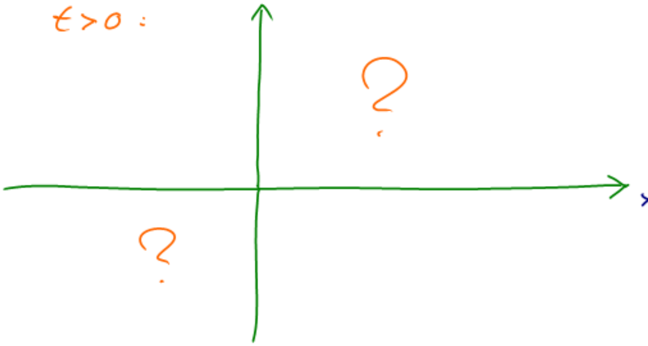
$\xrightarrow{\text{Wärmeleitung}}$



<u>Übung</u>: $T_0(x) = \vartheta \cos(k_0 x) \rightarrow T(x,t) = ?$



$\xrightarrow{\text{Wärmeleitung}}$



anhand der im Beispiel bestimmten Zeitentwicklung des "Einheitstemperatur-Peaks"

$$T_0(x) = \delta(x) \qquad (\text{also } \vartheta = 1)$$

gemäß

$$\boxed{T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x^2/4at} =: T_\epsilon(x)}$$

↖ „Wärmeleitungskern"

folgt direkt ein weiteres Lösungsverfahren der Wärmeleitungsgleichung:

zweite Lösungsstrategie:

stelle beliebiges $T_0(x)$ als Linearkombination verschobener Einheitstemp. peaks dar:

→

$$T_0(x) \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy \; T_0(y) \; \delta(x-y) \qquad t = 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow t$$

$$\boxed{T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \; T_0(y) \; T_t(x-y)} \qquad (3)$$

Wärmeleitungsgleichung ist linear und besitzt konstante Koeffizienten!

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \; T_0(y) \; e^{-(x-y)^2/4at}}$$

nur eine Integration, aber nicht notwendig einfacher als 1. Verfahren

Relation (3) ist ein Anwendungsbeispiel der

Def.: Faltung

Die Faltung zweier Fkten $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\boxed{(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy \; f(y)\, g(x-y)}$$

Somit gilt:

$$\boxed{T(x,t) = (T_0 * T_t)(x)}$$