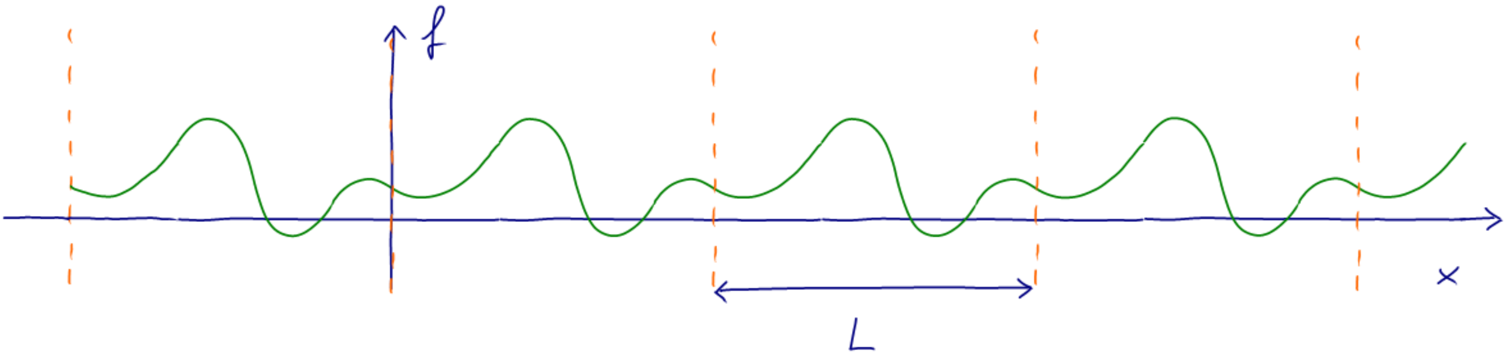
Fourierreihen periodischer Funktionen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist periodisch mit Periode L ("L-periodisch")

$$:\Leftrightarrow \qquad f(x+L) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$



vollständiges Funktionensystem L-periodischer Funktionen durch Restriktion von $\{\chi_k\}_{k\in\mathbb{R}}$ auf L-periodische χ_k!

$\longrightarrow$

$\underline{\chi_k(x) \quad L\text{-periodisch}}$ $\iff$ $\chi_k(x) = \chi_k(x+L)$ für alle x

$\iff$ $e^{ikx} = e^{ik(x+L)}$ " "

$\iff$ $1 = e^{ikL}$

$\iff$ $\underline{k = \frac{2\pi}{L} \cdot n}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ $\{\chi_{k_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\chi_{k_n}(x) = e^{i k_n x}$ (ohne $\frac{1}{2\pi}$!)

und $\boxed{k_n = \frac{2\pi}{L} n}$ bildet vollst. Funktionensystem

der L-periodischen Funktionen.

$\rightarrow$ Darstellung einer L-periodischen Fkt. durch Fourierreihe:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k_n)\, e^{i k_n x}} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

(oft: $L = 2\pi \rightarrow k_n = n$; $\hat{f}(k_n) \equiv \hat{f}_n$; $\rightarrow f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{inx}$)

Bestimmung der Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k_n)$ $(\equiv \hat{f}_n)$ mittels Skalarprodukt L-periodischer Fkten $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \frac{1}{L} \int_0^L dx \; f^*(x)\, g(x)}$$

(linear, positiv, symmetrisch)

wir zeigen: $\{ \chi_{k_n} \}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist ein orthonormales vollst. Funktionensystem, d.h. $\langle \chi_{k_n}, \chi_{k_m} \rangle = \delta_{n,m}$

$$\to \langle \chi_{k_m}, f \rangle = \langle \chi_{k_m}, \sum_n \hat{f}(k_n) \chi_{k_n} \rangle = \sum_n \hat{f}(k_n) \underbrace{\langle \chi_{k_m}, \chi_{k_n} \rangle}_{\delta_{m,n}} = \hat{f}(k_m)$$

d.h. $$\boxed{\hat{f}(k_m) = \langle \chi_{k_m}, f \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L dx \; f(x)\, e^{-i k_m x}}$$

zur Orthonormalität der Funktionen $\{\chi_{k_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

z.z. $\langle \chi_{k_n}, \chi_{k_m} \rangle = \delta_{n,m}$

$n = m$: $\langle \chi_{k_n}, \chi_{k_n} \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-ik_n x} e^{+ik_n x} dx = 1$ ✓

$n \neq m$: $\langle \chi_{k_m}, \chi_{k_n} \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-ik_m x} e^{ik_n x} dx =$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L e^{i\frac{2\pi}{L}\underbrace{(n-m)}_{=: q \,\in\, \mathbb{Z}\setminus\{0\}} x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iqy} dy$$

$x = \frac{L}{2\pi} y$

$$= \frac{1}{2\pi i q} e^{iqy}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi i q}\Big(\underbrace{e^{2\pi i q}}_{=1 \;(q\in\mathbb{Z})} - 1\Big) = 0$$ ✓

zusammengefasst:

Def./Satz

Die Fourierreihe einer L-periodischen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist

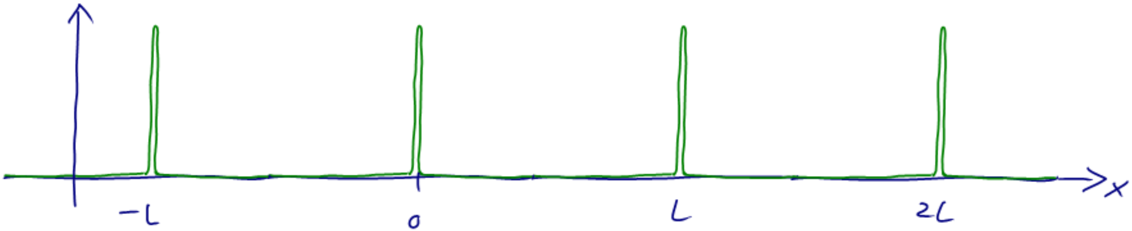
$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k_n)\, e^{i k_n x}$$

mit $k_n = \frac{2\pi}{L} n$ und Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(k_n) = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} dx\, f(x)\, e^{-i k_n x} ,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Beispiele: 1) $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL)$



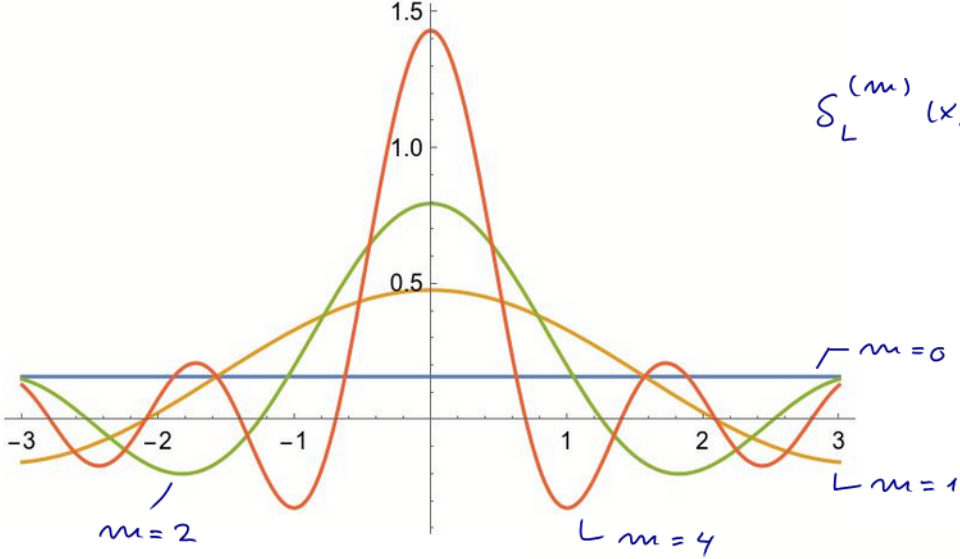
$$\hat{f}(k_n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} \Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL) \Big) e^{-i k_n x} \, dx = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \delta(x) \, e^{-i k_n x} \, dx = \frac{1}{L}$$

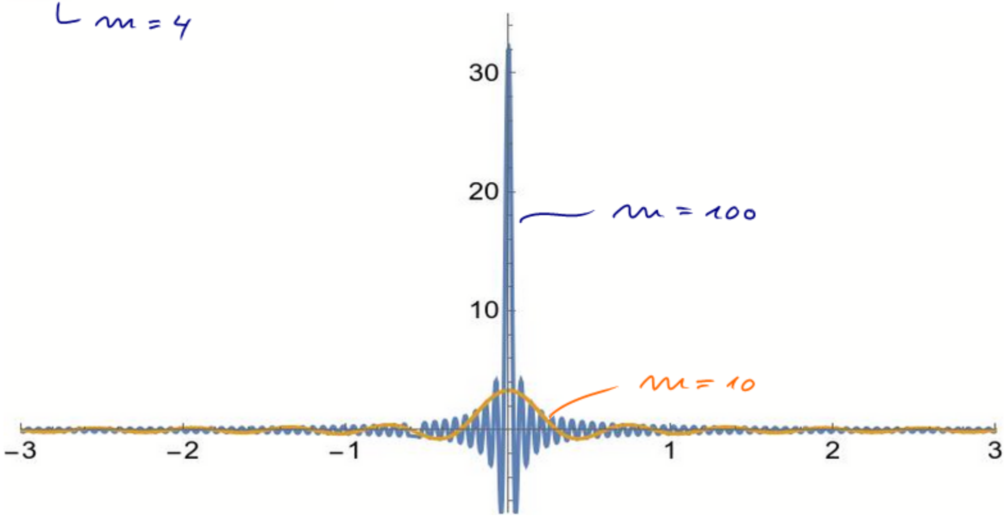
$$\rightarrow \quad \boxed{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i k_n x} = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n \in \mathbb{N}_+} \cos(k_n x)}$$

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

$$\delta_L^{(m)}(x) := \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{m} \cos(k_n x)$$

$$L = 2\pi$$

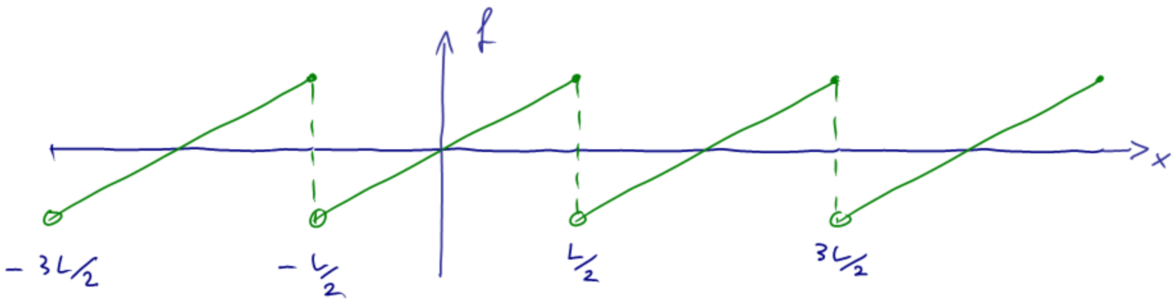




2) „Sägezahn - Funktion" $f(x)$ def. durch

(i) $f(x) = x$ für $x \in \left]-L/2,\ L/2\right]$

(ii) $f(x+L) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$



• $\underbrace{\hat{f}(k_0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x \, dx = \underline{\underline{0}}$;

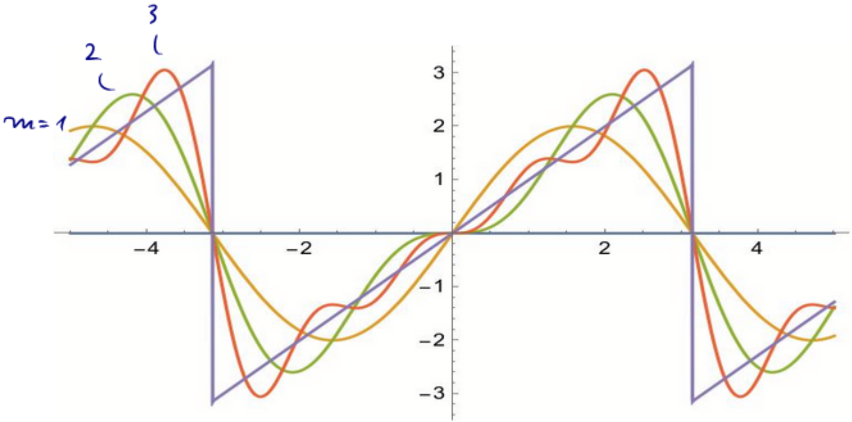
• $\underbrace{\hat{f}(k_n)}_{\overset{\neq}{0}} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \, x \, e^{-ik_n x} = \underbrace{\frac{i}{L}\,\frac{x\,e^{-ik_n x}}{k_n}\Big|_{-L/2}^{L/2}}_{= \frac{i}{k_n}\cos\left(\frac{k_n}{2}L\right)} - \underbrace{\frac{i}{L k_n}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_n x}\, dx}_{=0} = \underline{\underline{\frac{i}{k_n}(-1)^n}}$

$= \frac{i}{k_n}\cos(\pi n) = \frac{i}{k_n}(-1)^n$

$$f(x) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^n}{k_n} e^{i k_n x} \underset{k_n = -k_{-n}}{=} -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin k_n x}{k_n}$$

für $L = 2\pi$:

$$f(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$



$$f^{(m)}(x) := -2 \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$