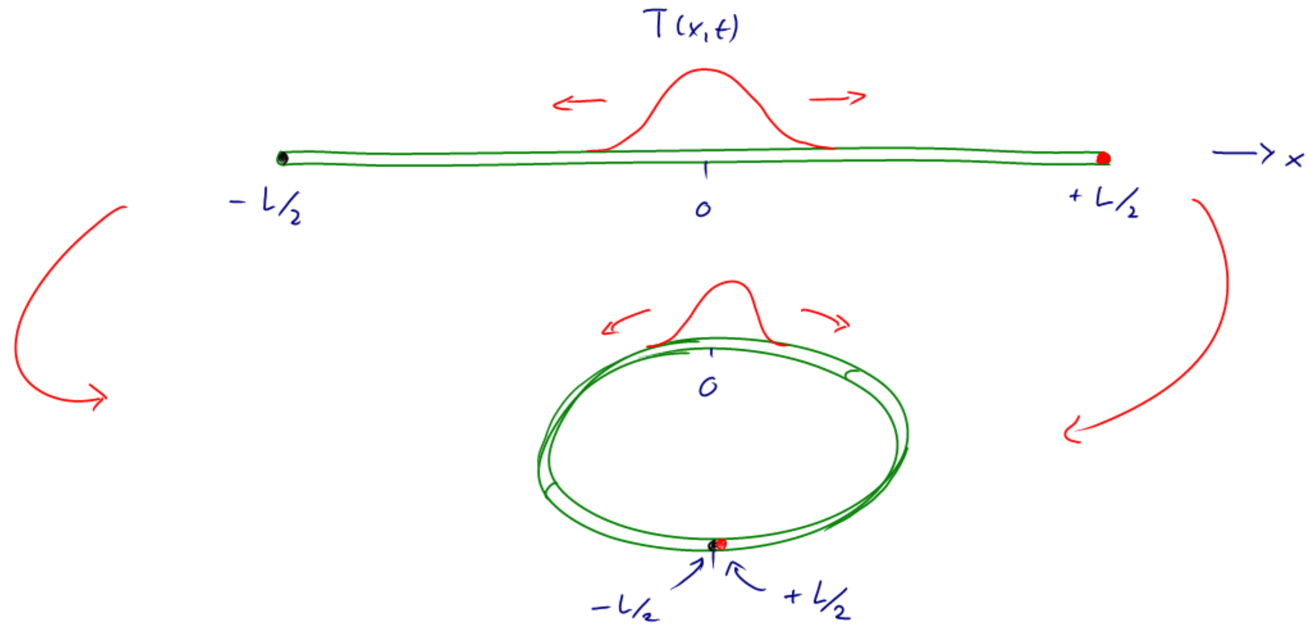
Anwendungsbeispiel Fourierreihe: Wärmeleitung auf einem Ring



Temperaturfeld $T(x,t)$ auf Ring

$\hat{=}$ L-periodisches Temperaturfeld $T(x,t)$ auf $\mathbb{R}$

→ L-periodische Lösung der 1D-Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ in Fourierreihendarstellung:

$$\boxed{T(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{T}_0(k_n)\, e^{-a k_n^2 t}\, e^{i k_n x}} \qquad k_n \overset{!}{=} \frac{2\pi}{L} n$$

$$\hat{T}_0(k_n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} T_0(x)\, e^{-i k_n x}$$

- L-periodisch? ✓
- Lösung der Wärmeleitungsgleichung?

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \sum_n \hat{T}_0(k) \left(-a k_n^2\right) e^{-a k_n^2 t} e^{i k_n x}$$

$$=$$ ✓

$$a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = a \sum_n \hat{T}_0(k)\, e^{-a k_n^2 t} \left(-k_n^2\right) e^{i k_n x}$$

z. B. $\quad T_0(x) = \vartheta\,\delta(x)$ für $x \in \left]-L/2, L/2\right]$

$$\rightarrow \quad \hat{T}_0(k_n) = \frac{\vartheta}{L}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} T_0(x,t) &= \frac{\vartheta}{L} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-a k_n^2 t + i k_n x} \\ &= \frac{\vartheta}{L}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a k_n^2 t} \cos(k_n x)\right) \end{aligned}}$$

<u>Näherungen:</u> $\quad \underline{\underline{t \ll L^2/a}}$: $\rightarrow$ <u>viele</u> Terme tragen signifikant zur Summe bei !

$\rightarrow$ Integralnäherung der Summe:

$$T(x,t) = \frac{\vartheta}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{L} e^{-a k_n^2 t} e^{i k_n x} = \frac{\vartheta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{dk}}\, e^{-a k^2 t} e^{i k x}$$

$$\underline{\underline{\Delta k}} = k_{n+1} - k_n$$

$$\underset{\text{Gauß}}{=} \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-x^2/4at} \quad ✓$$

$t \gg L^2/a$: nur wenige Terme relevant!

$$\longrightarrow \quad T(x,t) \approx \frac{\vartheta}{L}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{m} e^{-a k_n^2 t} \cos(k_n x)\right)$$

Zusammengefasst:

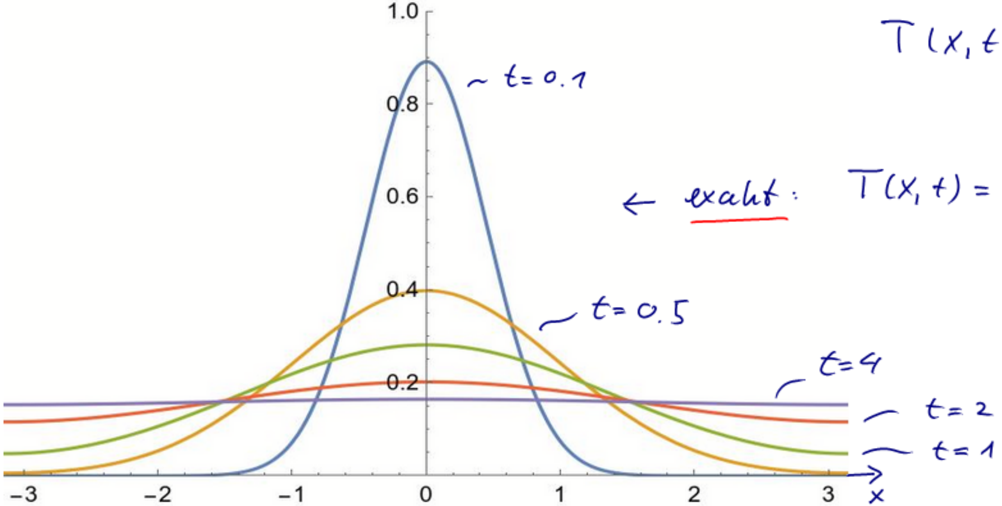
Integralnäherung

$$\boxed{T(x,t) = \frac{\vartheta}{L}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a k_n^2 t}\cos(k_n x)\right) \approx \begin{cases} \dfrac{\vartheta}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x^2/4at} & : \; t \ll \dfrac{L^2}{a} \\[2ex] \dfrac{\vartheta}{L}\left(1 + 2 e^{-a k_1^2 t}\cos(k_1 x)\right) & : \; t \gg \dfrac{L^2}{a} \end{cases}}$$

$m = 1$

$$k_1 = \frac{2\pi}{L}$$

$T(x,t)$ für $a=1$, $L=2\pi$, $\vartheta=1$



← exakt: $T(x,t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \cos(nx)$

genähert:

$t \leq 1$: $T(x,t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4t}}$;

$t \geq 1$: $T(x,t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{e^{-t}}{\pi} \cos(x)$;