n-dimensionale δ-Funktion

für $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\delta(\vec{x}) := \delta(x_1)\,\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)}$$

mit Eigenschaften entsprechend denen von $\delta(x)$:

(i) $$\int_G f(\vec{x})\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d^n\vec{x} = \begin{cases} f(x_0) & : \vec{x}_0 \in G \\ 0 & : \vec{x}_0 \notin G \end{cases}$$

(ii) $$\int_G f(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d^n\vec{x} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \qquad (\vec{x}_0 \in G)$$

(iii) $$\int_G f(\vec{x})\,\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)\,d^n\vec{x} = (-1)^k\,\frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}} \qquad (\vec{x}_0 \in G)$$

(iv) Transformationsregel: $\vec{g}: G \to G'$ sei diffbar und es gelte: $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 \in G$

$$\to \quad \delta(\vec{g}(\vec{x})) = \frac{1}{|\det J\vec{g}(x_0)|} \delta(\vec{x} - x_0)$$

denn

$$\int_G f(\vec{x})\, \delta(\vec{g}(\vec{x}))\, d^4\vec{x} = f(\vec{x}_0) \int_{U(x_0)} \delta(g(\vec{x}))\, d^4\vec{x}$$

$$\underset{\vec{x} = \vec{g}^{-1}(\vec{y})}{=} f(x_0) \int_{g(U(x_0))} \delta(\vec{y})\, |\det J\vec{g}^{-1}(y)|\, d^4 y$$

$$= f(x_0) \frac{1}{|\det J\vec{g}(x_0)|}$$

insbesondere für $n = 3$: $\quad \vec{x} = \vec{r} = (x, y, z)$:

- $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$

- $$\int_G f(\vec{r})\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, d^3\vec{r} = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & : \vec{r}_0 \in G \\ 0 & : \vec{r}_0 \notin G \end{cases}$$

- $$\int_G f(\vec{r})\,\mathrm{grad}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, d^3\vec{r} = -\,\mathrm{grad}\, f(\vec{r}_0) \qquad (\vec{r}_0 \in G)$$

<u>beachte</u>:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1D}}}{\delta(|\vec{r}| - r_0)} \neq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3D}}}{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

z.B.:

- $$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(|\vec{r}| - r_0)\, d^3\vec{r} = \int_0^\infty dr\, 4\pi r^2\, \delta(r - r_0) = 4\pi r_0^2$$

- $$\int_{\mathbb{R}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, d^3\vec{r} = 1$$

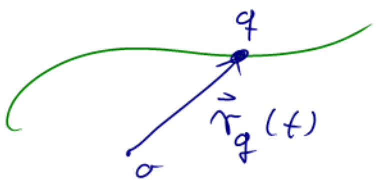
Anwendungen:

1) elektrische Ladungsdichte einer Punktladung q am Ort $\vec{r}_0$:

$$\varrho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

denn somit $\varrho(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ und $\int_{\mathbb{R}^3} \varrho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = q$

2) elektrische Ladungsdichte einer bewegten Punktladung q:



$$\varrho(\vec{r}, t) = q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$$

$\rightarrow$ elektr. Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \dot{\vec{r}}_q(t)\, q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$

$\varrho(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ erfüllen Kontinuitätsgleichung: $\rightsquigarrow$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \overset{!}{=} 0$$

Test:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\, q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) = -\, q \langle \operatorname{grad} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)), \dot{\vec{r}}_q(t) \rangle$$

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = \operatorname{div} \left(\dot{\vec{r}}_q(t)\, q\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \right) = q \langle \dot{\vec{r}}_q(t), \operatorname{grad} \delta(\vec{r} - \vec{r}_q(t)) \rangle$$

✓