n-dimensionale Fouriertransformation $\hat{=}$ n-mal 1D F.T.

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{auch: } \mathbb{C}, \text{ allg. VR } V)$$
$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

1. F.-T. von f bzgl x_1:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \hat{f}_1(k_1, x_2, \dots)\, e^{i k_1 x_1} \qquad (1a)$$

$$\text{mit } \hat{f}_1(k_1, x_2, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, f(x_1, x_2, \dots)\, e^{-i k_1 x_1} \qquad (1b)$$

2. F.-T. von $\hat{f}_1(k_1, x_2, \dots)$ bzgl. x_2:

$$\hat{f}_1(k_1, x_2, \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \hat{f}_2(k_1, k_2, x_3, \dots)\, e^{i k_2 x_2} \qquad (2a)$$

$$\text{mit } \hat{f}_2(k_1, k_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, \hat{f}_1(k_1, x_2, x_3, \dots)\, e^{-i k_2 x_2} \qquad (2b)$$

(2a) in (1a) und (1b) in (2b) führt auf

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \hat{f}_2(k_1, k_2, \ldots)\, e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$$

$$\text{mit} \quad \hat{f}_2(k_1, k_2, x_3, \ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \; f(x_1, x_2, \ldots)\, e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}$$

in dieser Weise fahren wir bis zur n-ten F.T fort und erhalten:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_n}{2\pi} \hat{f}(k_1, \ldots, k_n)\, e^{i(k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n)}$$

$$\text{mit} \quad \hat{f}(k_1, \ldots, k_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \; f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-i(k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n)}$$

mit <u>n-dim. Wellenvektor</u> $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$

und Standardskalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

also

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n \vec{k}}{(2\pi)^n} \, \hat{f}(\vec{k}) \, e^{i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} \\ \text{mit} \quad \hat{f}(\vec{k}) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n \vec{x} \, f(\vec{x}) \, e^{-i \langle \vec{k}, \vec{x} \rangle} \end{aligned}}$$

<u>n-dim. Fourier(rück)transformation</u>

Eigenschaften:

1) $$\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}\,, \quad \widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f} \qquad \text{(Linearität)}$$

2) sei $f_{\vec{a}}(\vec{x}) := f(\vec{x} - \vec{a})$; dann

$$\widehat{f_{\vec{a}}}(\vec{k}) = e^{-i\langle \vec{k}, \vec{a} \rangle}\, \hat{f}(\vec{k})$$

3) $$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_\ell}}(\vec{k}) = i k_\ell\, \hat{f}(\vec{k}) \quad ;$$

$$\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_{\ell_1} \cdots \partial x_{\ell_m}}}(\vec{k}) = (i)^m k_{\ell_1} \cdots k_{\ell_m}\, \hat{f}(\vec{k})$$

4) $$\widehat{f * g} = \hat{f}\, \hat{g} \qquad \text{(Faltungssatz)}$$

$$\hookrightarrow \quad f * g(\vec{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n\vec{y}\; f(\vec{y})\, g(\vec{x} - \vec{y})$$

insbesondere für $n=3$; $\vec{x} \equiv \vec{r}$:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F.T.}} \begin{pmatrix} i k_1 \\ i k_2 \\ i k_3 \end{pmatrix} \equiv i \vec{k}$$

$$\rightarrow \quad \widehat{\operatorname{grad} f}\,(\vec{k}) \equiv \widehat{\vec{\nabla} f}\,(\vec{k}) = i \vec{k}\, \hat{f}\,(\vec{k})$$

$$\widehat{\operatorname{div} \vec{A}}\,(\vec{k}) \equiv \widehat{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}\,(\vec{k}) = i \vec{k} \cdot \hat{\vec{A}}\,(\vec{k})$$

$$\widehat{\operatorname{rot} \vec{A}}\,(\vec{k}) \equiv \widehat{\vec{\nabla} \times \vec{A}}\,(\vec{k}) = i \vec{k} \times \hat{\vec{A}}\,(\vec{k})$$

$$\widehat{\Delta f}\,(\vec{k}) \equiv \widehat{(\vec{\nabla})^2 f}\,(\vec{k}) = -|\vec{k}|^2\, \hat{f}\,(\vec{k})$$

Anwendungsbeispiel: Wärmeleitung in 3D: $T(\vec{r},t)$ genügt

3D-Wärmeleitungsgleichung $$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\Delta T}$$

gegeben $T(\vec{r},0)$; bestimme $T(\vec{r},t)$ für $t>0$!

F. T. der Wärmeleitungsgl. bzgl. $\vec{r}$ führt auf lin. DGL in t:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}(\vec{k},t) = -a|\vec{k}|^2\,\hat{T}(\vec{k},t)}$$

$$\longrightarrow \quad \hat{T}(\vec{k},t) = \hat{T}_0(\vec{k})\,e^{-a|\vec{k}|^2 t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{T(\vec{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\hat{T}_0(\vec{k})\,e^{-a|\vec{k}|^2 t + i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}}$$

wobei $$\hat{T}_0(\vec{k}) = \int d^3\vec{r}\; T(\vec{r},0)\,e^{-i\langle\vec{k},\vec{r}\rangle}$$

z.B. $T(\vec{r},0) = \vartheta\, \delta(\vec{r}) \longrightarrow \hat{T}_0(\vec{k}) = \vartheta$

$$\to \quad T(\vec{r},t) = \vartheta \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, \underbrace{e^{-a|\vec{k}|^2 t + i\langle \vec{k},\vec{r}\rangle}}_{= e^{-a k_1^2 t + i k_1 x_1}\, e^{-a k_2^2 t + i k_2 x_2}\, e^{-a k_3^2 t + i k_3 x_3}}$$

$$= \vartheta \prod_{j=1}^{3} \underbrace{\int \frac{dk_j}{2\pi}\, e^{-a k_j^2 t + i k_j x_j}}_{= \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\, e^{-x_j^2/4at}} = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi a t}^{\,3}}\, e^{-|\vec{r}|^2/4at}$$

$\to$ 3D - Wärmeleitungskern $\boxed{\Gamma(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}^{\,3}}\, e^{-|\vec{r}|^2/4at}}$

$$\left[\to \quad T(\vec{r},0) \xrightarrow{t} T(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,'\, T(\vec{r}\,',0)\, \Gamma(\vec{r}-\vec{r}\,', t) \right].$$