# Lineare Abbildungen

$V$ und $W$ seien im folgenden VRe, entweder beide reell oder beide komplex.

Definition: Die Abbildung
$$A : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto A(v)$$

ist linear g.d.w.

(i) $A(v+u) = A(v) + A(u)$

(ii) $A(\lambda v) = \lambda A(v) \qquad \lambda \in \mathbb{K}$

Bemerkungen:

1) Notation: Argumentklammern „( ... )" werden bei linearen Abb.en i.d.R. <u>nicht</u> verwendet:

statt $\underline{A(v)}$ also nur $\underline{Av}$ !

2) $\mathcal{L}(V, W)$ := Menge aller linearen Abb.en $V \to W$ bildet mit Addition

$$(A+B)v := Av + Bv$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda A)v := \lambda(Av)$$

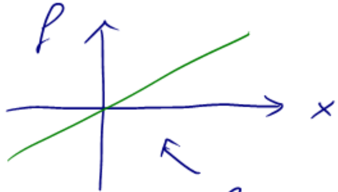
einen <u>Vektorraum</u> der Dimension $\dim V \cdot \dim W$.

3) $A$ linear $\longrightarrow$ $A\vec{o}_V = \vec{o}_W$ (denn $A\vec{o}_V = A(0\vec{o}_V) = 0\,A\vec{o}_V = \vec{o}_W$)

## Beispiele:

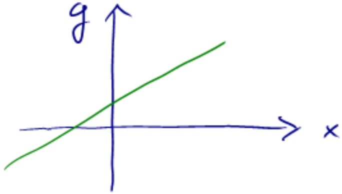
1) $V = W = \mathbb{R}$ :

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax$



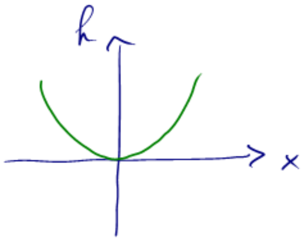

linear!

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + \overset{\neq 0}{b}$




nicht linear!

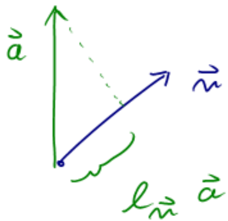
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$




nicht linear!

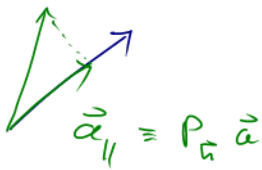
2) $V = \mathbb{R}^3$ , $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ normierter Vektor

a) Länge der Projektion auf $\vec{n}$:




$$
\begin{aligned}
l_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\vec{a} &\longmapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle
\end{aligned}
$$

b) Parallelanteil bzgl. $\vec{n}$:

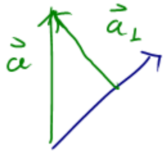



$$
\begin{aligned}
P_{\vec{n}} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
\vec{a} &\longmapsto \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle\, \vec{n}
\end{aligned}
$$

c) <u>identische Abbildung</u>:

$$\mathbb{1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{a} \longmapsto \vec{a}$$

d) <u>Orthogonalanteil</u> bzgl. $\vec{n}$:

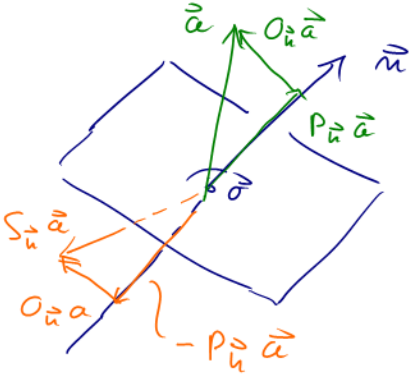



$$O_{\vec{n}}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\vec{a} \longmapsto \vec{a} - P_{\vec{n}}\,\vec{a}$$

wegen $\quad O_{\vec{n}}\,\vec{a} = \vec{a} - P_{\vec{n}}\,\vec{a} = (\mathbb{1} - P_{\vec{n}})\,\vec{a} \quad$ also

$$O_{\vec{n}} = \mathbb{1} - P_{\vec{n}}$$

e) Spiegelung an Ebene $\perp \vec{n}$ durch $\vec{0}$ :




$$S_{\vec{n}} = O_{\vec{n}} - P_{\vec{n}}$$

$$= (\mathbb{1} - P_{\vec{n}}) - P_{\vec{n}}$$

d)

d.h. $$S_{\vec{n}} = \mathbb{1} - 2P_{\vec{n}}$$

3) $V \equiv P_k :=$ Menge der ganzrationalen Funktionen maximal $k$-ten Grades

$$\equiv \operatorname{Span}\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}.$$

<u>Ableitung</u>

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad P_k \longrightarrow P_{k-1}$$
$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}$$

und <u>Integration</u>

$$\int_a^x \ldots dx': \quad P_k \longrightarrow P_{k+1}$$
$$f \longmapsto \int_a^x f(x')\, dx'$$

sind lineare Abbildungen.

# Bild und Kern einer linearen Abbildung

**Definition:**

Bild und Kern einer lin. Abb.

$$A : V \rightarrow W$$

sind definiert durch

$$\operatorname{Im} A := \{ A v \mid v \in V \} \subset W$$

$$\ker A := \{ v \in V \mid A v = \vec{0} \} \subset V$$

**Satz:**

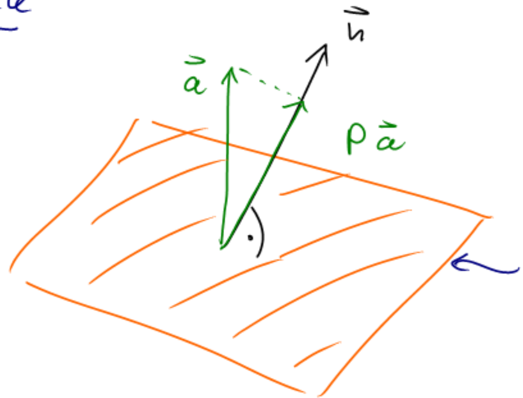
a) $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Ker} A$ sind UVRe von $W$ bzw. $V$

b) $\dim V = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A$

c) $A$ injektiv $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} A = \{ \vec{0} \}$

Beispiele

1)




$$P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a} \longmapsto \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, \vec{n}$$

$$E_\perp \overset{!}{=} \ker P \quad \rightarrow \quad \text{Dim. } 2$$

$$+$$

$$\operatorname{Im} P = \operatorname{Span}\{\vec{n}\} \quad \rightarrow \quad \text{Dim. } 1$$

$$3 \quad \checkmark$$

2)

$$\frac{\partial}{\partial x} : P_3 \rightarrow P_2$$

$$\rightarrow \quad \ker \frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\operatorname{Span}\{1\}}_{\text{Dim. } 1} \quad ; \quad \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{P_2}_{\text{Dim. } 3}$$

$$\rightarrow \quad \dim \ker \frac{\partial}{\partial x} + \dim \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial x} = 4 = \dim P_3 \quad \checkmark$$

Beweis von a) als Übung.

Beweis von b): $(a_1, \dots, a_k)$ sei Basis von $\operatorname{Ker} A$,

$(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r)$ sei Basis von $V$

es genügt zu zeigen: $Ab_1, \dots, Ab_r$ ist Basis von $\operatorname{Im} A$ $(*)$

$$\left( \quad \longrightarrow \quad \dim V \overset{!}{=} k + r = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A \quad \right)$$

$(*)$: (i) $\underline{\operatorname{Span}(Ab_1, \dots, Ab_r) \overset{!}{=} \operatorname{Im} A}$ :

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span}(\underset{\vec{0}}{\underset{\shortparallel}{Aa_1}}, \dots, \underset{\vec{0}}{\underset{\shortparallel}{Aa_k}}, Ab_1, \dots, Ab_r) = \operatorname{Span}(Ab_1, \dots, Ab_r) \checkmark$$

(ii) $\underline{Ab_1, \dots, Ab_r \text{ sind linear unabhängig}}$ :

$$\vec{0} \overset{!}{=} \lambda_1 Ab_1 + \dots + \lambda_r Ab_r = A(\underbrace{\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r}_{=: v}) \quad \text{impliziert } v = \vec{0};$$

da $b_1, \dots, b_r$ lin. unab. folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ $\checkmark$

Beweis von c) : $A$ injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker A = \{\vec{o}_V\}$

„$\Rightarrow$" da $A$ linear ist $A\vec{o}_V = \vec{o}_W$; da $A$ injektiv, ist $\vec{o}_V$ das einzige Urbild von $\vec{o}_W$ unter $A$; d.h. $\ker A = \{\vec{o}_V\}$

„$\Leftarrow$" gelte $\underline{Au = Av}$ für $u, v \in V$; z.z.: $\underline{u = v}$ !

$\Rightarrow$ $\vec{o}_W = Au - Av = A(u-v)$

d.h. $u - v \in \ker A = \{\vec{o}_V\}$, $\rightarrow$ $u - v = \vec{o}_V$

also $u = v$.