Partielle Differenzialgleichungen

Erinnerung: gewöhnliche Differenzialgleichung k-ter Ordnung

$\equiv$ Gleichung in den Variablen u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, …, $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$ und x:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, x\right) \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

z.B.:

(a) $\frac{\partial u}{\partial x} = u + b x$ (DGL 1. Ord.)

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k u - \gamma \frac{\partial u}{\partial x}$ (DGL 2. Ord.)

Lösung der DGL (1) $\equiv$ Funktion $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ derart, dass für alle $x \in [a, b]$:

$$F\left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \dots, x\right) \overset{!}{=} 0$$

[z.B. ist $u(x) = c e^x - b(1+x)$ Lsg der DGL (a)]

n-dim. partielle Differenzialgleichung k-ter Ordnung

$\equiv$ Gleichung in den Variablen u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, ..., $\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$F\left(u, \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}, \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}, \dots, \left\{\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}\right\}\right) = 0 \qquad (1)$$

Lösung der PDGL (1) $\equiv$ Funktion $u : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$
$x \mapsto u(x)$

derart, dass für alle $x \in D$ Gl (1) erfüllt; d.h.

$$F\left(u(x), \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right\}, \dots, \left\{\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}\right\}, x\right) \overset{!}{=} 0$$

in der Physik relevant: $\rightarrow$

Lineare PDGLen mit konstanten Koeffizienten

$\hookrightarrow$ PDGL der Form

$$Lu = 0 \qquad \text{(homogene PDGL)}$$

$$Lu = f \qquad \text{(inhomogene PDGL)}$$

mit linearem Differenzialoperator

$$L = a^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots + \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1 \dots i_k}^{(k)} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

und Inhomogenität

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Beispiele:

1) Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung: $\quad x = (t, x_1, \dots, x_d)$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \Delta = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$\lambda = a$ bzw. D

2) freie Schrödingergleichung:

$$L = \frac{\partial}{i \partial t} - \lambda \Delta = \frac{\partial}{i \partial t} - \lambda \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad \lambda = \frac{\hbar}{2m}$$

3) Poisson-Gleichung (Elektrostatik):

$$L = -\Delta = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

4) Wellengleichung:

$$L = \Box := \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

hilfreich:

Linearität $\rightarrow$ Superposition von Lösungen !

(i) u_1, u_2 Lösungen der homog. PDGL $Lu = 0$

$\rightarrow$ $u_1 + u_2$, λu_1 ebenfalls Lsgen von $Lu = 0$

⌈ Lösungsraum $\equiv$ $\ker L$ $\equiv$ Vektorraum ! ⌋

(ii) u_1 Lösung der homogenen PDGL $Lu = 0$,
u_2 Lösung der inhomogenen PDGL $Lu = f$,

$\rightarrow$ $\lambda u_1 + u_2$ ebenfalls Lsg von $Lu = f$

⌈ Lösungsraum der inhomog. PDGL $=$ $u_2 + \ker L$ $=$ affiner Raum ⌋

$\rightsquigarrow$ Lösungsverfahren mittels Green-Funktionen:

schematisch: Green-Funktion $G_{x_0}(x)$ der PDGL $Lu = f$ genügt per def.

$$\boxed{L\, G_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)}$$

$\rightarrow$ Lösung der inhomogenen PDGL

$$L u = f$$

mit allgemeiner Inhomogenität gegeben durch:

$$\boxed{u(x) \overset{!}{=} \int d^4x_0 \; f(x_0)\; G_{x_0}(x)}$$

Superposition der mit $f(x_0)$ gewichteten Green-Funktionen G_{x_0}

denn

$$Lu(x) = L\left(\int d^4x_0 \; f(x_0)\, G_{x_0}(x)\right)$$

$$= \int d^4x_0 \; f(x_0)\, \underbrace{L\, G_{x_0}(x)}_{\overset{!}{=}\,\delta(x-x_0)}$$

L linear

$$= \int d^4x_0 \; f(x_0)\, \delta(x-x_0)$$

$$= f(x)$$

Bestimmung der Green-Funktion?

Bestimmung der Green-Fkt. mittels

a) physikalisch motivierten Ansatz

b) per Fouriertransformation im Falle translationsinvarianter Randbedingungen:

$\Rightarrow$ $G_{x_0}(x) = G(x - x_0)$ und

$$L\, G(x) = \delta(x)$$

$$\text{F.T.} \downarrow \qquad \downarrow \text{F.T.}$$

$$\widehat{LG}(k) = 1$$

$\frac{\partial}{\partial x_l} \to i k_l$

mit $\widehat{LG}(k) = \left(a^{(0)} + i \sum_l a_l^{(1)} k_l + \dots \right) \hat{G}(k)$ also

$$G(k) = \frac{1}{a^{(0)} + i \sum_l a_l^{(1)} k_l + \dots} \xrightarrow{(\text{F.T.})^{-1}} \underline{\underline{G(x)}} \quad !$$

noch zu klären:

- Randbedingungen !
- Lösungen zu gegebenen Anfangs- bzw. Randwerten !

Beispiele $\longrightarrow$